I3 Lois de l'induction électromagnétique dans un circuit fixe

Objectifs du chapitre

1. Connaître la notion du flux d'un champ magnétique.
2. Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
3. Connaître les lois de Faraday et de Lenz.
4. Décrire et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.
5. Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.
6. Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
7. Connaître les notions de flux d'auto-induction, de flux propre et d'inductance propre.
8. Différencier le flux propre des flux extérieurs.
9. Vérifier la compatibilité du signe de l'inductance propre avec la loi de modération de Lenz.
10. Évaluer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par la bobine étant donné.
11. Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
12. Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en "influence totale", le champ magnétique créé par la bobine étant donné.
13. Citer des applications du phénomène d'inductance mutuelle dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
14. Établir le système d'équation en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
15. Réaliser un bilan de puissance et d'énergie
16. Établir la loi des tensions pour le transformateur parfait.
17. Citer des applications du transformateur de tension pour le transport électrique ou l'isolement.
18. *Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.*

Plan du cours

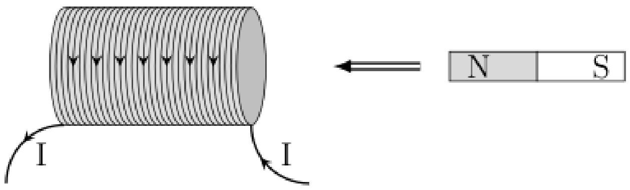
1 Lois de l'induction

1.1 Mise en évidence expérimentale

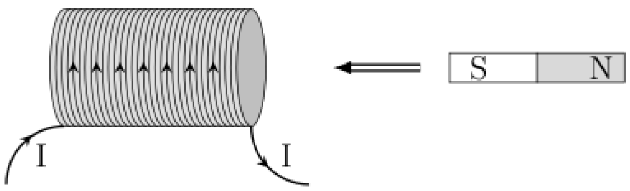
> **Expérience** Vidéo : Induction de Lorentz
> Vidéo : Induction de Neumann
> Vidéo sur l'histoire du magnétisme

Expérience 1 : induction de Neumann

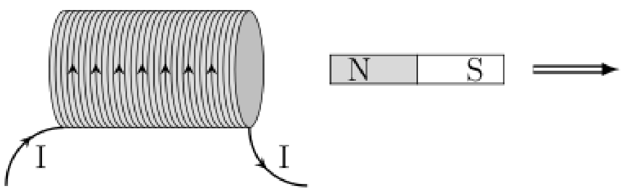
On considère un aimant et un circuit conducteur. On mesure l'intensité i parcourant le circuit.



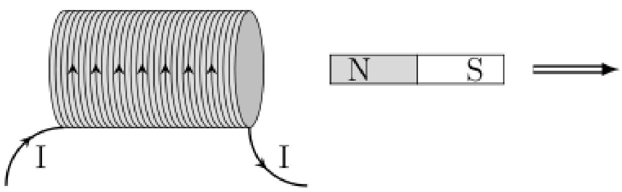
Si on approche une face nord d'un aimant droit au voisinage de la bobine, c'est à dire un champ magnétique dirigé vers la gauche, alors un courant induit apparaît dans celle-ci dans un sens qui lui fait créer un champ magnétique vers la droite (on peut raisonner en terme de faces magnétiques : on approche une face nord, le circuit oppose alors une face nord).



Si on approche une face sud, c'est à dire un champ magnétique dirigé vers la droite, un courant induit apparaît, son sens créé un champ magnétique dirigé vers la gauche.



Si on éloigne une face nord, un courant induit apparaît, son sens créé un champ magnétique dirigé vers la gauche.



Si on éloigne une face sud, un courant induit apparaît, son sens créé un champ magnétique dirigé sur la droite.

Ainsi, le mouvement relatif entre l'aimant et le circuit entraîne un courant dans le circuit. Le circuit se comporte donc comme un générateur délivrant un courant i. Il est donc équivalent à un générateur de courant. Ce courant induit provoque en plus un champ magnétique dit **induit**.

> **Application 1: Lignes de champ**
> Dessiner les lignes de champs de l'aimant et de la bobine pour chacun des cas ci-dessus.

Expérience 2 : induction de Lorentz

On place une bobine à proximité d'un aimant. Si la bobine se déplace on constante l'apparition d'un courant dans la bobine.

Conclusion

Le phénomène d'induction apparaît :

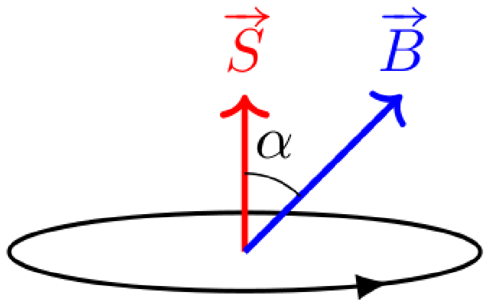
— avec un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

— avec un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

C'est le principe du détecteur de métaux, de l'antivol dans les magasins... Un moment magnétique en mouvement entraîne un courant dans un circuit fixe. La mesure de ce courant permet donc de détecter la présence du moment magnétique.

1.2 Flux d'un champ magnétique

Pour évaluer, quantitativement la variation du champ magnétique dans lequel baigne la bobine, la grandeur pertinente est le **flux du champ magnétique** à travers la bobine. Dans le cas d'une spire de surface (section) S, on définit un vecteur surface $\vec{S} = S\vec{n}$. L'orientation de ce vecteur surface dépend donc de l'orientation choisie pour la spire (flèche noire).



Définition

Lorsque la spire baigne dans un champ magnétique uniforme et dépendant du temps $\vec{B}$ on définit le **flux du champ magnétique** par :

$$\boxed{\Phi(t) = \vec{B}.\vec{S} = SB(t)\cos\alpha}$$

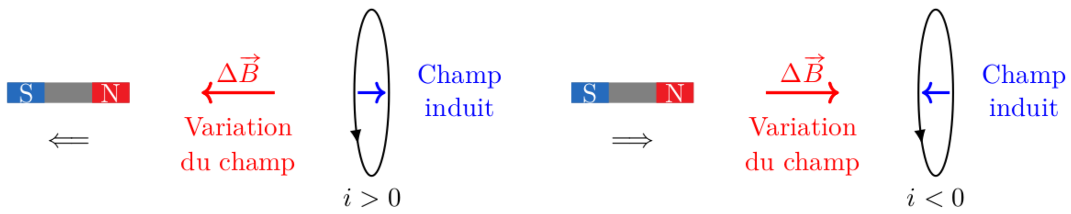
Le flux est une grandeur scalaire et il possède un signe. Le flux est positif lorsque le champ à le même sens que la normale et il est négatif dans le cas contraire.
L'unité du flux est le Weber (Wb).

L'hypothèse d'uniformité du champ magnétique paraît contraignante, mais elle ne concerne que l'échelle de la spire. Il suffit que les dimensions du circuit soient petites devant la taille caractéristique des variations spatiales du champ.

1.3 Loi de modération de Lenz

Revenons à l'expérience précédente et schématisons les différents cas. On rappelle que le champ magnétique est orienté le long des lignes de courants qui vont du pôle Nord vers le pôle Sud. Par ailleurs, le champ est plus intense proche de l'aimant. Ainsi, lorsque l'on approche un aimant d'une spire avec le pôle Nord en avant, le champ ressenti à travers celle-ci augmente. Quelques cas sont schématisés sur la figure ci-dessous :

Observons le sens du champ magnétique induit à cause de l'apparition du courant dans la spire.



Application 2: Loi de Lenz

Trouver l'orientation du champ induit créé par une spire lorsqu'on approche le pole sud.
Même question lorsqu'on éloigne l'aimant.

Ces observations vérifient la loi suivante :

La **loi de modération de Lenz** indique que le courant induit dans le circuit tend, par le champ magnétique qu'il crée, à modérer la variation du flux qui lui à donné naissance.

1.4 Loi de Faraday

Afin de quantifier les résultats de ses expériences, Faraday introduit une loi qui porte désormais son nom.

Définition

Soit un circuit fermé et orienté traversé par un flux magnétique Φ. Toute variation du flux dans le circuit provoque l'apparition d'une force électromotrice (f.e.m ou tension) e donnée par **la loi de Faraday** :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

avec Φ le flux du champ magnétique $\vec{B}$ dans le circuit
La f.e.m e de la loi de Faraday est toujours orientée en convention générateur dans les circuits électriques.

Remarque la loi de modération de Lenz s'exprime dans le signe $-$ de la loi de Faraday. La f.e.m induite s'oppose au flux. On remarque que s'il n'y a pas de mouvement relatif entre la bobine et l'aimant, le flux est constant et donc la f.e.m est nulle. L'induction est toujours liée à un mouvement mécanique ou à une variation du champ magnétique.

2 Phénomène d'auto-induction

2.1 Inductance d'un circuit

Définition

On considère un un circuit parcouru par un courant i. Ce courant crée un champ magnétique $\vec{B}_p$ nommé **champ propre**. Le flux de $\vec{B}_p$ à travers une surface S s'appuyant sur le circuit et orienté par le circuit est nommé **flux propre** et se note Φ_p :

$$\boxed{\Phi_p(t) = Li(t)}$$

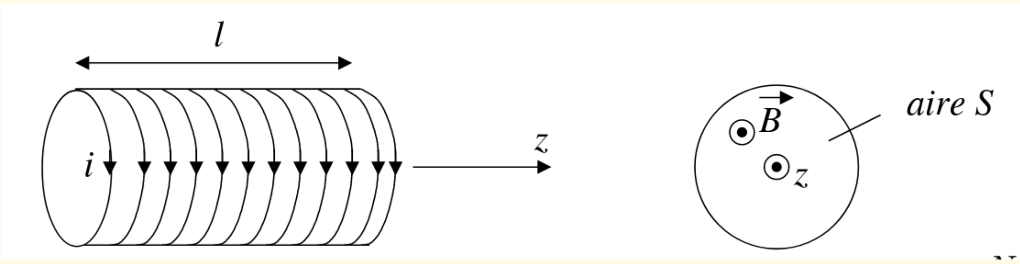
où L est une constante **positive** qui ne dépend que des propriétés géométriques. L est nommé **inductance propre** et s'exprime en H.

Cette constante de proportionnalité n'est autre que le coefficient d'inductance propre déjà rencontrée lors de l'étude des bobines. Cette formule se justifie par le fait que le champ magnétique est proportionnel à l'intensité i parcourant le circuit.

2.2 Inductance propre d'une bobine

Application 3: Inductance propre d'une bobine

On considère une bobine de longueur ℓ, de section S et d'axe Oz comportant N spires. On rappelle que, dans l'approximation du "solénoïde infini" parcouru par un courant $i(t)$ le champ magnétique créé à l'intérieur s'écrit $B(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{e}_z$



Déterminer l'inductance propre de la bobine. Estimer l'ordre de grandeur de l'inductance d'une bobine de 1000 spires de rayon 3cm et d'une longueur 30cm.

2.3 fem d'auto-induction

Les variations du courant $i(t)$ ont pour conséquences de modifier le champ propre créé et donc son flux propre. D'après la loi de Lenz, si le flux varie cela créé une f.e.m. d'auto-induction qui "s'oppose" à l'apparition du courant.

Variation $i(t) \rightarrow$ Variation $\vec{B}_p(t) \rightarrow$ Variation $\Phi_p(t) \rightarrow$ Création e

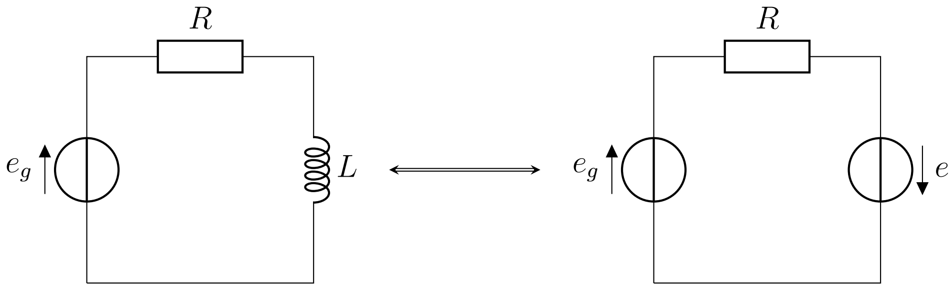
D'après la loi de Faraday, il vient :

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_p}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

Pour une bobine de dimension quelconque, on a le même résultat mais le calcul de L est plus compliqué. Dans tous les cas la bobine est donc équivalente à un générateur de f.e.m. e

Dans le cas d'un circuit fermé de résistance R et d'inductance L, comportant un générateur de force électromotrice e_g on retrouve l'équation obtenue au chapitre SP5 :

$$e_g(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



En effet l'équation de maille s'écrit : $e_g = R - e$ avec $e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

2.4 Approche énergétique

Pour trouver un bilan de puissance, il suffit de partir de la loi des mailles que l'on multiplie par i. Reprenons l'exemple précédent :

$$e_g i = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

On a :

— $P_j = Ri^2$ la puissance reçue par la résistance du circuit dissipée par effet Joule

— $P_{\text{mag}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ la puissance magnétique stockée par le circuit sous l'effet du phénomène d'auto-induction.

— $P_g = u_g i$ la puissance fournie par le générateur

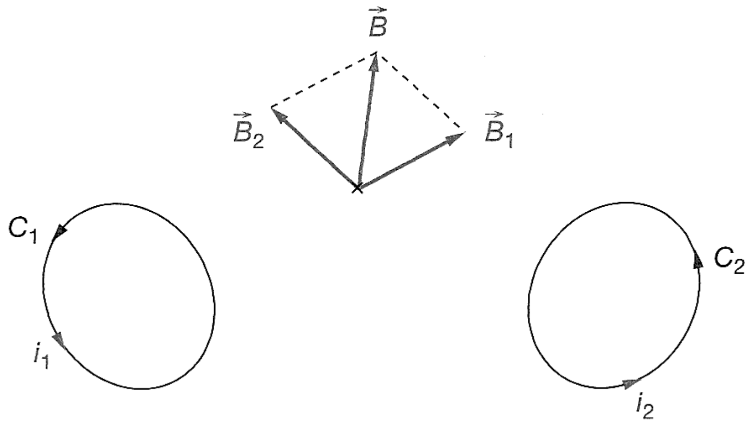
Définition

On définit l'énergie magnétique stockée grâce aux phénomènes d'auto-induction par :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li^2$$

3 Induction mutuelle

3.1 Coefficient d'inductance mutuelle



Considérons deux circuits fixes indépendants. Le circuit 1 est parcouru par un courant i_1 qui génère un champ magnétique $\vec{B}_1$ et le circuit 2 est parcouru par un courant i_2 qui génère un champ magnétique $\vec{B}_2$. Le champ magnétique total est donc $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.
Le phénomène d'induction apparaît lorsque le flux du champ total varie dans l'un ou l'autre circuit. Ce peut être par suite de la variation de l'intensité du courant dans le même circuit ou dans l'autre circuit. On parle de phénomène **d'induction mutuelle** dans ce dernier cas.
Le circuit 2 crée un champ magnétique $\vec{B}_2$ et donc un flux magnétique $\Phi_{2\to1}$ au travers du circuit 1.
Le champ magnétique $\vec{B}_2$ étant proportionnel à i_2, on en déduit que $\Phi_{2\to1}$ est proportionnel à i_2 ainsi :

$$\Phi_{2\to1} = M_{21} i_2$$

Par un raisonnement similaire le circuit 1 crée un flux magnétique $\Phi_{1\to2}$ au travers du circuit 2 tel que :

$$\Phi_{1\to2} = M_{12} i_1$$

On peut, d'autre part, montrer que $M_{12} = M_{21} = M$ par raison de symétrie.

Définition

Soient deux circuit 1 et 2 parcourus par des courant i_1 et i_2. Il existe un coefficient d'induction mutuelle M tel que :

$$\boxed{\Phi_{2\to1} = M i_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\Phi_{1\to2} = M i_1}$$

Ce coefficient d'inductance mutuelle peut-être négatif et s'exprime en Henry (H).

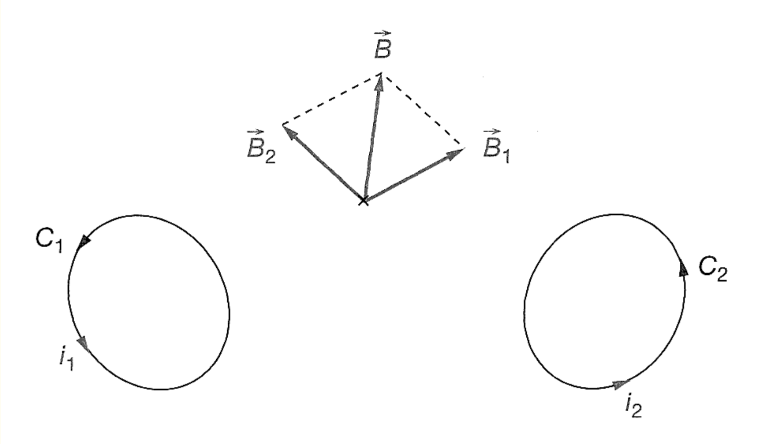
Le flux magnétique total traversant le circuit 1 est donc :

$$\Phi_1 = \Phi_{\text{p},1} + \Phi_{2\to1} = L_1 i_1 + M i_2$$

où $\Phi_{\text{p},1}$ est le flux propre du circuit 1. Dans ce cas la force électromotrice dans le circuit 1 s'exprime par la loi de Faraday :

$$e_1(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1(t)}{\mathrm{d}t} = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

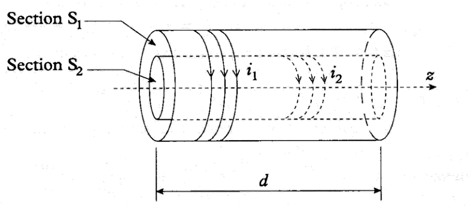
Application 4: Force électromotrice



Trouver l'expression de la force électromotrice dans le circuit 2

3.2 Cas de deux bobines en influence magnétique

On considère deux bobines de grande longueur de même axe Oz et de même longueur d disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spire.



L'objectif est de déterminer l'inductance mutuelle entre les deux bobines.
On choisit l'orientation positive de chaque bobine dans le sens des courants. La bobine 2 crée un champ $B_2 = \mu_0 \frac{N_2 i_2}{d}$ à l'intérieur de la bobine 2 et nul à l'extérieur. Ainsi :

$$\Phi_{2\to 1} = N_1 S_2 B_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{d} i_2$$

d'où le coefficient d'inductance mutuelle M qui vaut :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{d}$$

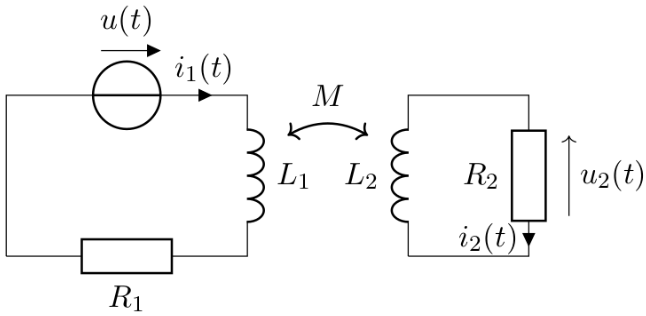
Par hypothèse, on peut directement affirmer la relation $\Phi_{1\to 2} = M i_1$ alors que celle-ci est difficile à démontrer par un calcul direct.
Si l'on suppose que les bobines ont la même section S alors $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{d}$. Or d'après ce qu'on a vu précédemment, $L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 S}{d}$ et $L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 S}{d}$ et on peut en déduire $M = \sqrt{L_1 L_2}$. L'intégralité des lignes de champs des deux bobines traverse l'autre. Dans ce cas on parle d'influence totale.

3.3 Circuits couplés

Méthode pour traiter un exercice avec induction mutuelle :

1. Déterminer par la loi de Lenz la fem des inductances
2. Remplacer sur les schémas les inductances par leur fem
3. A l'aide de la loi des mailles, donner les équations électriques en appliquant la loi de Lenz puis les résoudre

Étudions le circuit suivant :



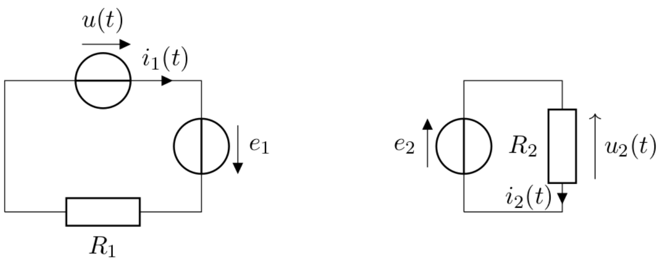
Soit Φ_1 le flux magnétique à travers le premier circuit. Ce flux est la somme du flux propre $\Phi_{\text{p},1}$ et du flux $\Phi_{2\to 1}$ créé par le 2eme circuit. Ainsi :

$$\Phi_1(t) = \Phi_{p,1}(t) + \Phi_{2\to 1}(t) = Li_1(t) + Mi_2(t)$$
$$\Phi_2(t) = \Phi_{p,2}(t) + \Phi_{1\to 2}(t) = Li_2(t) + Mi_1(t)$$

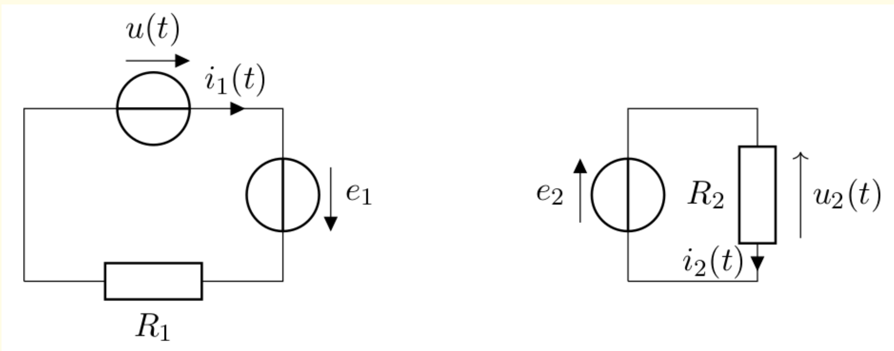
Les f.e.m. d'induction dans le circuit 1 et 2 s'écrivent donc :

$$e_1(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1(t)}{\mathrm{d}t} = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$e_2(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2(t)}{\mathrm{d}t} = -L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

On peut donc représenter les deux circuits sous la forme du schéma suivant :



Application 5: Loi des mailles



En appliquant la loi des mailles montrer que :

$$u(t) = R_1 i_1(t) + L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$0 = R_2 i_2(t) + L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

On obtient ainsi un système d'équations couplées.
On se place en régime sinusoïdal complexe. Dans ce cas on a $\underline{u}(t) = \underline{u}e^{j\omega t}$ $(u(t) = \Re(\underline{u}(t)))$.

Application 6: Régime sinusoïdal complexe

Montrer qu'en régime sinusoïdal complexe, les équations de l'application précédentes s'écrivent :

$$\underline{u} = R_1\underline{i_1} + j\omega L_1\underline{i_1} + j\omega M\underline{i_2}$$
$$0 = R_2\underline{i_2} + j\omega L_2\underline{i_2} + j\omega M\underline{i_1}$$

Bilan énergétique

Application 7: Bilan énergétique

Effectuer un bilan énergétique de circuit étudié et montrer que l'énergie magnétique totale emmagasinée à chaque instant dans le dispositif est donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Définition

Dans le cas de circuits électriques couplés par inductance mutuelle, l'énergie magnétique stockée dans les deux circuits vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

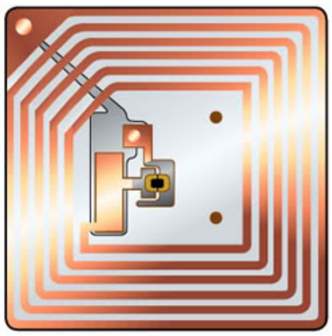
où le terme :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{couplage}} = M i_1 i_2}$$

représente **l'énergie de couplage magnétique** entre les deux circuits.

3.4 Quelques applications

La radio-identification : C'est une méthode permettant la transmission à distance d'informations placées sur de petits marqueurs (étiquettes adhésives, puces sans contact, étiquettes antivol...). Lorsque l'étiquette passe près d'un lecteur qui est un système actif fournissant un champ magnétique, un courant circule dans le circuit et permet d'alimenter une petite antenne qui peut alors envoyer l'information contenue dans la puce.
Utilisation de la puce RFID : Décathlon, antivols, forfaits de ski, télépéage...

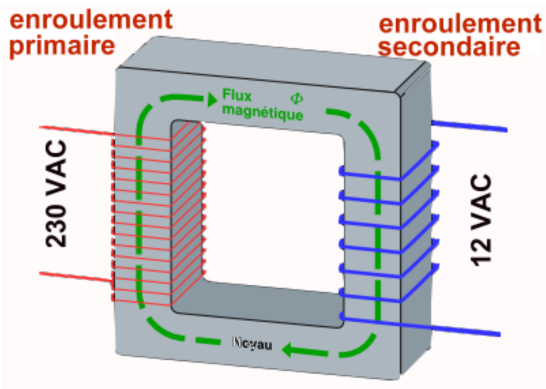


Les détecteurs de métaux une bobine crée un champ magnétique et si un morceau de métal se trouve à proximité, il se crée en son sein un courant. Ce courant crée lui-même un champ magnétique détecté via la fem qui apparaît dans la bobine du détecteur.
Le rechargement par induction Pour les brosses à dents ou pour les téléphones portables on peut transmettre sans contact l'énergie électrique d'un générateur vers le système à recharger. Chacun est munis d'une bobine.

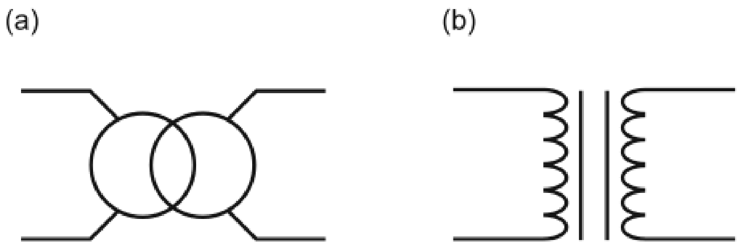
4 Le transformateur idéal

4.1 Modèle du transformateur parfait

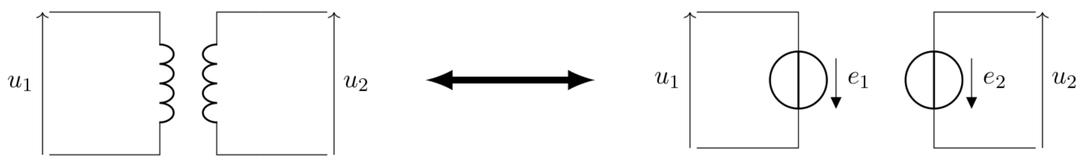
Un transformateur est constituée par deux bobinages (primaire et secondaire) enroulés autour d'un tore de matériau ferromagnétique.
Le noyau de ferromagnétique permet de canaliser les lignes de champ. Dans le cas du transformateur parfait, on considère que les résistances des bobinages sont nulles et que le couplage est parfait, c'est à dire que le flux magnétique à travers une spire du secondaire est le même qu'à transfert une spire du primaire.



Pour utiliser un transformateur, on met une source de tension variable au niveau du primaire. L'intensité i_1 parcourant les boucles de courant crée un champ magnétique variable. Ce champ magnétique induit un courant au niveau du secondaire. Dans un schéma électrique un transformateur peut-être représenté par un de deux symboles suivants :



Dans le cas du transformateur parfait le primaire est branché à une source de tension et le secondaire sur une résistance. Le schéma équivalent est alors le suivant :



4.2 Loi des tensions

On note $\varphi(t)$ le flux du champ magnétique $\vec{B}$ (existant dans le noyau de fer) à travers une boucle de courant. On note N_1 le nombre de spire du primaire et N_2 et le nombre de spires du secondaire. On a donc :

- Le flux traversant le primaire : $\Phi_1 = N_1\varphi$
- Le flux traversant le scondaire : $\Phi_2 = N_2\varphi$

Les f.e.m induites dans le primaire et le secondaire sont alors :

$$e_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -N_1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad e_2 = -N_2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Or $u1 = -e_1$ et $u_2 = -e_2$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2}$$

Dans un transformateur idéal, les tensions au primaire et au secondaire sont liées par la relation :

$$\boxed{\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = m}$$

où m se nomme **le rapport de transformation**. En changeant le nombre de spires au primaire et au secondaire on peut donc diminuer ou augmenter la tension.

— Si $m > 1$, donc $N_1 > N_2$, alors la tension $u_2 < u_1$: on abaisse la tension.

— Si $m > 1$, donc $N_1 < N_2$, alors la tension $u_2 > u_1$: on augmente la tension.

— Si $m = 1$, donc $N_1 = N_2$, alors la tension $u_2 = u_1$: la tension est inchangée.

4.3 Utilisation

Il existe de nombreuses utilisations aux transformateurs :

— Transport de l'énergie à très haute tension ($400\,000\,\mathrm{V}$) puis retour aux hautes tension ($40\,000\,\mathrm{V}$) et aux tensions du secteur ($230\,\mathrm{V}$)/

— Conversion de la tension du secteur en basse tension (12 ou $24\,\mathrm{V}$) : chargeurs de téléphones par exemple.

— Transformateur d'isolement (rapport $m = 1$) : il permet d'isoler le primaire et le secondaire (découplage des masses par exemple).