M1 Cinématique du point

Objectifs du chapitre

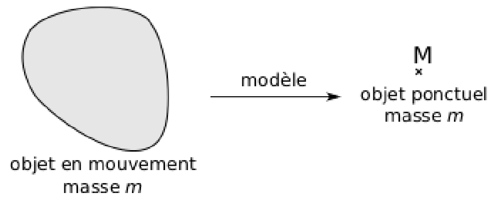
1. Connaître les notions d'espace et de temps classiques, de référentiel d'observation.
2. Savoir que le mouvement est relatif à un référentiel
3. Connaître les notions de vecteur position, vitesse et accélération
4. Connaître les systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques
5. Utiliser les expressions des composantes des vecteur position, vitesse et accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
6. Savoir choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
7. Construire le trièdre local associé au repérage d'un point.
8. Connaître le mouvement à vecteur accélération constant : savoir exprimer les vecteurs vitesse et position en fonction du temps.
9. Connaître le mouvement circulaire (uniforme et non uniforme) : savoir exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires.
10. Savoir identifier les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.

Plan du cours

1 Quelques notions de cinématique

1.1 Modèle du point matériel

Objectif : Décrire le mouvement d'un objet
Le modèle du point matériel (ou de la masse ponctuelle) consiste à décrire le mouvement d'un objet en le représentant par un seul de ses points.
Ce point est souvent le centre de masse (ou son centre de gravité) de l'objet (nous verrons pourquoi en mécanique des solides). En faisant cela, on perd de l'information : on ne connaît pas la rotation de l'objet sur lui-même.



Animation Centre d'inertie

1.2 Référentiel d'observation

Exemple : Un observateur dans un train en marche voit son voisin immobile alors qu'un observateur à quai le voit avancer.

Le mouvement d'un point matériel dépend de celui de l'observateur.

Il faut donc d'abord définir le système étudié (appelé l'observé) et ensuite définir l'observateur

Animation Relativité du mouvement

Pour décrire un mouvement, il est nécessaire de définir correctement les distances et les temps. En mécanique classique, ces deux notions sont absolues et définies grâce aux unités des mètres et des secondes. Pour que la cadre de la mécanique classique reste valable, on supposera toujours que la vitesse v des corps en mouvement est très faible devant la célérité de la lumière dans le vide c. Dans ce cadre, pour décrire un mouvement, il faut avant tout définir un référentiel dans lequel l'étudier.

Définition

Un **référentiel** est un point de vue nécessaire à la description d'un mouvement. Il contient :

— Un repère permettant de décrire l'espace

— Une horloge permettant de mesurer le temps

Un mouvement est toujours relatif, **la description d'un mouvement dépend du référentiel**.

La première chose à faire en mécanique est de définir le référentiel d'étude. Sans cette définition on ne sait pas de quoi on parle.

Application 1: Référentiel

Décrire le mouvement d'un casque d'un cycliste et de la valve d'une de ses roues dans le référentiel du sol (c'est-à-dire ce que voit quelqu'un à l'arrêt) et dans le référentiel lié au vélo.

Référentiel
Exemple de référentiels : référentiel du laboratoire, terrestre, héliocentrique, géocentrique.

2 Description du mouvement d'un point

On se place dans un référentiel d'étude. On note O le centre du repère et $M(t)$ la position d'un point mobile au temps t.

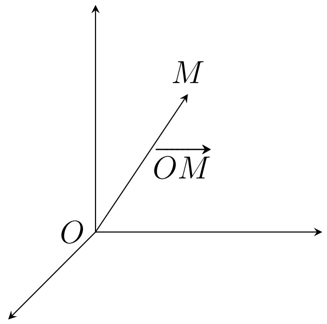
Définition

Le mouvement du point $M(t)$ est défini par trois vecteurs cinématiques :

— Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$

— Le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$

— Le vecteur accélération $\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$



Un trajectoire est l'ensemble des positions successives de M au cours du temps.

En physique comme en mécanique, on simplifie la notation et on omet de noter (t). Mais toutes les grandeurs dépendent du temps.
Les vecteur $\vec{a}$ et $\vec{v}$ dont des vecteurs instantanés, ils sont définis au temps t quelque soit le temps.
La position à l'instant t du point mobile est notée M et celle à l'instant $t + \Delta t$ est notée M'. Alors le vecteur vitesse du point à l'instant t est défini par :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

Or $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)$ donc :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Cette propriété est due à la définition du vecteur dérivée.

De la même manière :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt}$$

3 Systèmes de coordonnées

Animation Exemples vidéos d'un vol parabolique et d'un pendule

Pour décrire qualitativement le mouvement d'un point M dans un référentiel, il faut choisir une **base** de vecteurs dans laquelle on peut exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$. C'est un **système de coordonnées**.
Pour étudier un pendule ou un mouvement autour d'un point fixe, il vaut mieux utiliser une nouvelle base.

3.1 Rappels sur les vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est le nombre :

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Dans une base orthonormée, tout vecteur A peut-être décomposé sous forme :

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

Où A_1, A_2 et A_3 sont les composantes (appelées projection du vecteur A) sur les directions de base.
La projection de A sur le vecteur unitaire $\vec{e}_1$ s'écrit :

$$A_1 = \vec{A}.\vec{e}_1 = A\cos\alpha$$

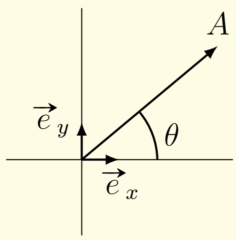
On note aussi :

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$$

Application 2: Projection d'un vecteur

Soit $\vec{A}$ un vecteur tel que $(\vec{e}_x, \vec{A}) = \theta$ et contenu dans le plan xOy.

1. Évaluer la projection A_x de $\vec{A}$ sur $\vec{e}_x$.
2. Évaluer la projection A_y de $\vec{A}$ sur $\vec{e}_y$.
3. Évaluer la projection A_z de $\vec{A}$ sur $\vec{e}_z$.



3.2 Base orthonormée

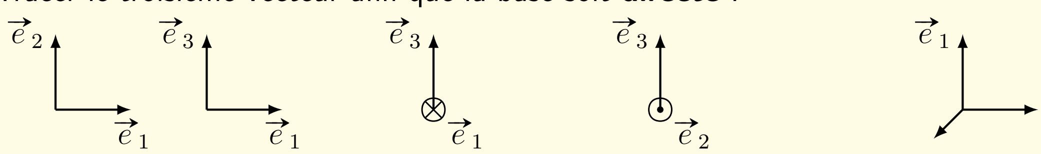
Une base **orthonormée directe** est composée de 3 vecteurs unitaires (notés $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ou $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$).

Propriétés

— Les trois vecteurs sont perpendiculaires entre eux.
— $||\vec{e}_1|| = \vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1$
— Un base est **directe** si $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ (produit vectoriel). On en déduit les relations entre les vecteurs à l'aide de permutations circulaires ou la règles des trois doigts.

Application 3: Base orthonormée

Tracer le troisième vecteur afin que la base soit **directe** :



L'ajout d'un point O (origine) à la base permet d'obtenir un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

3.3 Système de coordonnées cartésiennes

a) Vecteur position

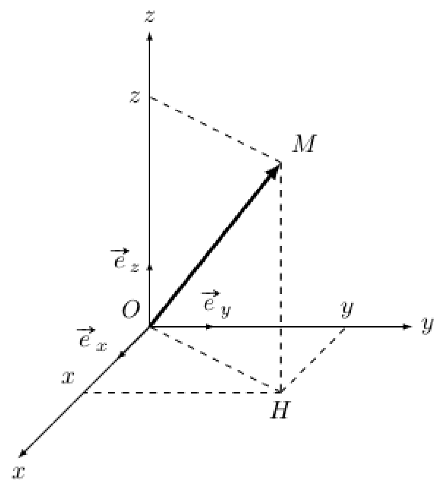
Définition

Les coordonnées cartésiennes sont définies dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est alors défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$

Sa norme est :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Définition

On définit en physique le **déplacement élémentaire** comme étant le déplacement infiniment petit $\vec{dl}$ réalisé lors d'un temps infiniment cours dt. Si on se déplace d'une petite distance, chaque coordonnées du vecteur position varie d'une petite valeur dx, dy et dz.
Ce déplacement élémentaire entre t et $t + dt$ est représenté par :

$$\vec{dl} = \overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t) = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

Dans ce repère, le système d'axe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe par rapport au référentiel

b) Vecteur vitesse

Les vecteur unitaires sont fixes, leur dérivée est donc nulle. Pour obtenir le vecteur vitesse il faut donc dériver les coordonnées du vecteur position :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z}$$

Souvent on note $v_x = \dot{x}$ (composante sur Ox de la vitesse)

c) Vecteur accélération

En dérivant une seconde fois le vecteur position, on trouve :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z}$$

3.4 Système de coordonnées cylindriques

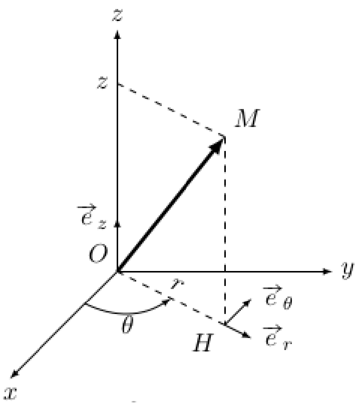
Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont mieux adaptées pour décrire le mouvement d'un point M lorsqu'il tourne autour d'un axe privilégié (l'axe $(O, \vec{e}_z)$)

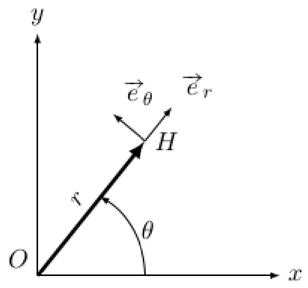
a) Vecteur position

Définition

On définit les coordonnées cylindriques comme représenté sur la figure ci-dessous. Un point M est défini par les coordonnées r, θ, z.
Le repère est défini par la base orthonormée des vecteurs $(\vec{e}_e, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On note H le projeté de M dans le plan (xOy). On définit alors le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ tel que $\overrightarrow{OH} = r\,\vec{e}_r$ (vecteur radial) et $\vec{e}_\theta$ le vecteur orthoradial, obtenu par rotation de 90° autour de l'axe Oz. $\vec{e}_\theta$ est toujours orienté dans le même sens que θ.
Dans le plan (x, y), la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est appelée **base polaire**. Le point M est alors défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r}$$





Sa norme est $OM = \sqrt{r^2 + z^2}$.
Remarque

- La coordonnée θ n'apparaît pas explicitement dans le vecteur position.
- On peut remarque que par projection $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Ainsi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Application 4: Coordonnées cylindriques

Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (r, θ, z). Exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques et réciproquement (on fera un schéma dans le plan xOy).

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\tan\theta = y/x$.
Déplacement élémentaire :

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ correspond au déplacement infinitésimal de la particule si les coordonnées varient de manière infinitésimale. Autrement dut, on passe des coordonnées (r, θ, z) au coordonnées $(r+dr, \theta+d\theta, z+dz)$, infiniment proches.
Selon zz le déplacement élémentaire est le même qu'en coordonnées cartésiennes, soit $dz\overrightarrow{e}_z$. Il faut donc étudier le déplacement élémentaire dans le plan polaire. Sur $\overrightarrow{e}_r$ le déplacement est dr et sur $\overrightarrow{e}_\theta$, le déplacement est un arc de cercle, donc $rd\theta$. Ainsi :

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta + dz\overrightarrow{e}_z$$

b) Dépendance temporelle

Pour calculer le vecteur vitesse, il faut connaître l'expression de la dérivée des vecteurs unitaires. En projetant les vecteurs unitaires dans la base cartésienne, on trouve :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e}_r &= \cos\theta\overrightarrow{e}_x + \sin\theta\overrightarrow{e}_y \\ \overrightarrow{e}_\theta &= -\sin\theta\overrightarrow{e}_x + \cos\theta\overrightarrow{e}_y\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{e}_r}{dt} &= \frac{d(\cos\theta)}{dt}\overrightarrow{e}_x + \frac{d(\sin\theta)}{dt}\overrightarrow{e}_y = -\dot\theta\sin\theta\overrightarrow{e}_x + \dot\theta\cos\theta\overrightarrow{e}_y = \dot\theta\overrightarrow{e}_\theta \\ \frac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt} &= -\dot\theta\cos\theta\overrightarrow{e}_x - \dot\theta\sin\theta\overrightarrow{e}_y = -\dot\theta\overrightarrow{e}_r\end{aligned}$$

Remarques :

— Ces formules sont à connaître par cœur.

c) Vecteur vitesse

Pour obtenir le vecteur le vecteur vitesse, il faut diviser le vecteur position par rapport au temps, en tenant compte des vecteur unitaires :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \frac{dr\overrightarrow{e}_r}{dt} + \frac{dz\overrightarrow{e}_z}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e}_r + r\frac{d\overrightarrow{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{e}_z = \dot r\overrightarrow{e}_r + r\dot\theta\overrightarrow{e}_\theta + \dot z\overrightarrow{e}_z$$

On peut aussi retrouver le vecteur grâce au déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

d) Vecteur accélération

En dérivant le vecteur vitesse, on trouve :

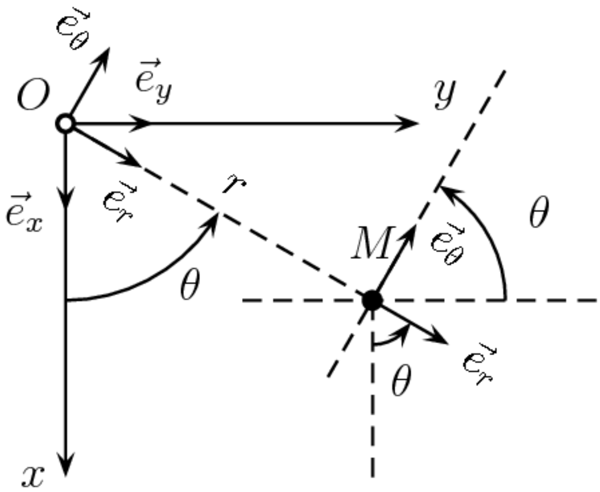
$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d\dot r}{dt}\overrightarrow{e}_r + \dot r\frac{d\overrightarrow{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot\theta\overrightarrow{e}_\theta + d\frac{d\dot\theta}{dt}\overrightarrow{e}_\theta + r\dot\theta\frac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt} + \frac{d\dot z}{dt}\overrightarrow{e}_z \\ &= (\ddot r - r\dot\theta^2)\overrightarrow{e}_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\overrightarrow{e}_\theta + \ddot z\overrightarrow{e}_z\end{aligned}$$

Remarques :

— L'accélération peut-être décomposée suivant les vecteurs unitaire : $a_r = \ddot r - r\dot\theta^2$ (accélération radiale) et $a_\theta = (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)$ (accélération orthoradiale).

3.5 Système de coordonnées polaires

C'est la restriction de la base cylindrique au plan xOy (z=0). Cette base est très couramment utilisée pour décrire les mouvements de rotation dans un plan (trajectoire des satellites, véhicule dans un virage, balancier d'une horloge ...)



Application 5: Base polaire

Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ dans la base polaire.
Déterminer ensuite le vecteur vitesse et le vecteur accélération d'un solide se déplaçant sur une trajectoire en spirale : $r = a\theta$ et $d\theta/dt =$ cte $= \omega_0$

4 Étude de mouvements à vecteur accélération constant

Un point M dans un référentiel R donné a un mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite ou une portion de droite. En général on s'arrange pour que cette droite soit parallèle à un vecteur unitaire de la base cartésienne, $\vec{e}_x$ par exemple.

> **Remarque** Nous étudions un problème de cinématique. Ainsi, on ne se préoccupe pas de savoir d'où provient cette accélération et cette vitesse. Toutefois nous remarquons que le problème peut décrire par exemple le mouvement d'une voiture lorsqu'on maintient l'accélération constante.

4.1 Mouvement rectiligne uniforme

Au points de départ, le référentiel est défini mais pas le système de coordonnées. On peut donc le choisir pour simplifier les calculs. On se place donc en coordonnées cartésiennes de sorte que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$$

Au points de départ, le référentiel est défini mais pas le système de coordonnées. On peut donc le choisir pour simplifier les calculs. On se place donc en coordonnées cartésiennes de sorte que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$$

On se place en coordonnées cartésiennes de sorte que :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0} \quad \vec{v}(0) = v_0\,\vec{e}_x \quad \vec{a}(0) = 0\,\vec{e}_x$$

Un mouvement est dit uniforme si la norme de sa vitesse est constante : $v = v_0$. Pour un mouvement rectiligne, on a : $\dot{x} = v = v_0$ donc $x = v_0 t + \text{cte}$

4.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

On se place en coordonnées cartésiennes de sorte que :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0} \quad \vec{v}(0) = v_0\,\vec{e}_x \quad \vec{a}(0) = a_0\,\vec{e}_x$$

L'accélération permet de déduire que

$$\ddot{x} = a_0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = 0$$

On doit intégrer une fois ces équations pour obtenir la vitesse. On obtient :

$$\dot{x} = a_0 t + v_{0,x} \quad \dot{y} = v_{0,y} \quad \dot{z} = v_{0,z}$$

Les termes $v_{0,x}$, $v_{0,y}$ et $v_{0,z}$ sont des constantes d'intégrations. Commet $v(0) = v_0\,\vec{e}_x$, on en déduit : $v_{0,x} = v_0$, $v_{0,y} = 0$ et $v_{0,z} = 0$. Ainsi on a :

$$\vec{v} = (a_0 t + v_0)\,\vec{e}_x$$

On en déduit la vitesse $v = |a_0 t + v_0|$. La valeur absolue est importante car $a_0 t + v_0$ peut changer de signe si a_0 et v_0 ne sont pas du même signe.
Pour obtenir le vecteur position, on doit intégrer cette fois la vitesse. On obtient :

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0$$

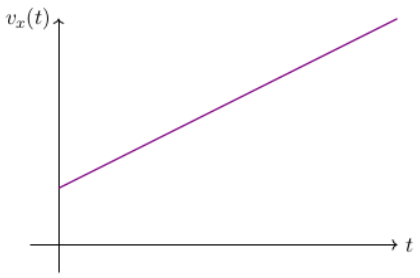
Les termes x_0, y_0 et z_0 sont des constantes d'intégrations. Comme $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$, on en déduit $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Ainsi :

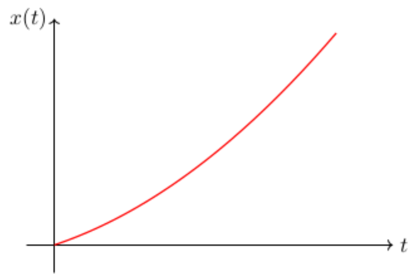
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t\right)}$$

Application 6: Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Une voiture initialement à vitesse nulle accélère uniformément à $1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, au bout de combien de temps a-t-elle parcourue 10 m et 100 m ? Pour ces deux points, quelle est alors sa vitesse ?

On remarque que la vitesse et l'accélération sont toujours colinéaires. Le mobile va de plus en plus vite dans la direction de ces vecteurs.





4.3 Mouvement courbe uniformément accéléré

Tout le raisonnement de ce paragraphe est à savoir refaire, il ne faut surtout pas l'apprendre par cœur. Il s'agit par exemple du mouvement d'un masse lorsqu'elle n'est soumise qu'à l'accélération de la pesanteur. On se place en coordonnées cartésiennes de sorte que :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0} \quad \vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_x \quad \vec{a}(0) = a_0 \vec{e}_y$$

L'accélération permet de déduire que

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = a_0 \quad \ddot{z} = 0$$

On doit intégrer une fois ces équations pour obtenir la vitesse. On obtient :

$$\dot{x} = v_{0,x} \quad \dot{y} = a_0 t + v_{0,y} \quad \dot{z} = v_{0,z}$$

Les termes $v_{0,x}$, $v_{0,y}$ et $v_{0,z}$ sont des constantes d'intégrations. Commet $v(0) = v_0 \vec{e}_x$, on en déduit : $v_{0,x} = v_0$, $v_{0,y} = 0$ et $v_{0,z} = 0$. Ainsi on a :

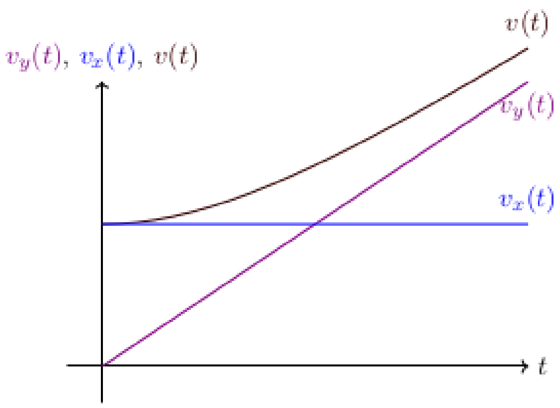
$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_x + a_0 t \vec{e}_y = \left| \begin{array}{l} v_0 \\ a_0 t \\ 0 \end{array} \right.$$

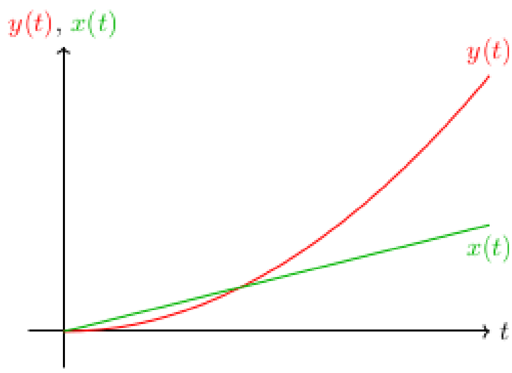
On en déduit la vitesse $v = \sqrt{v_0^2 + (a_0 t)^2}$. L
Pour obtenir le vecteur position, on doit intégrer cette fois la vitesse. On obtient :

$$x = v_0 t + x_0 \quad y = \frac{1}{2} a_0 t^2 y_0 \quad z = z_0$$

Les termes x_0, y_0 et z_0 sont des constantes d'intégrations. Comme $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$, on en déduit $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = v_0 t \vec{e}_x + \frac{1}{2} a_0 t^2 \vec{e}_y}$$

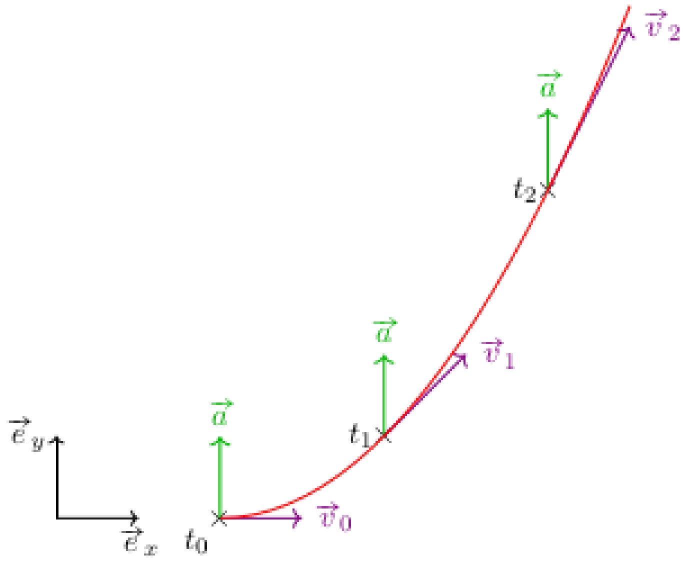




Au final, la trajectoire dans le plan (x, y) est donnée par $(x(t), y(t)) = (v_0 t, a_0 t^2/2)$. Pour trouver l'équation de la trajectoire il faut faire disparaître le temps de l'expression de y. On a donc $t = x/v_0$, que l'on injecte dans l'expression de y, ce qui donne :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} \frac{a_0}{v_0^2} x^2}$$

Il s'agit donc d'une trajectoire parabolique.



5 Étude de mouvements circulaires

5.1 Mouvement circulaire uniforme

Application 7: Mouvement circulaire uniforme

Considérons un mouvement circulaire uniforme. Dans ce cas, on a pour tout temps, $r(t) = R$ et $\dot{\theta}(t) = \Omega$, la vitesse angulaire. Pour simplifier on prendra une altitude constante $z(t) = 0$.
Donner les vecteurs cinématiques en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$$

La vitesse $\vec{v}$ s'écrit :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\Omega\vec{e}_\theta$$

L'accélération $\vec{a}$ s'écrit :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Remarques

- La norme du vecteur vitesse vitesse $v = R\Omega$ et accélération $a = R\Omega^2$ sont constantes. Le mouvement est donc constant. **Mais le vecteur vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ n'est pas constant car $\vec{e}_\theta$ dépend du temps.**
- Le vecteur accélération est dirigé vers le centre du cercle. On dit que l'accélération est **centripète**.

5.2 Mouvement circulaire non uniforme

Application 8: Mouvement circulaire non uniforme

Considérons un mouvement circulaire non uniforme. Dans ce cas, on a pour tout temps, $r(t) = R$ et $\ddot{\theta} \neq 0$. Pour simplifier, on prendra une altitude constante $z(t) = 0$.
Donner les vecteurs cinématiques en coordonnées polaires.

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$$

La vitesse $\vec{v}$ s'écrit :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\Omega\vec{e}_\theta$$

L'accélération $\vec{a}$ s'écrit :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire, la projection de la vitesse s'écrit $v = R\dot{\theta}$. Ainsi :

$$R\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$$

Ainsi l'accélération peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta}$$

Cette fois, la norme de la vitesse et de l'accélération ne sont plus constantes. Le vecteur accélération n'est plus dirigée vers le centre du cercle. L'accélération est composée d'une composante radiale (vers le centre) qui provoque la rotation, mais aussi d'une composante tangentielle, qui freine ou accélère la rotation.

6 Coordonnées cylindriques ou cartésiennes ?

Lors d'un problème de mécanique, il faut dès le départ choisir le système de coordonnées. Selon le choix du système, le problème sera soit très simple, soit très complexe mathématiquement. Toutefois, si les calculs sont corrects, les deux systèmes de coordonnées conduisent au même mouvement, le mouvement physique réel ne dépend en effet pas du choix du physicien pour l'étudier.
On choisira les coordonnées :

— cartésiennes pour étudier des translations et mouvement rectilignes

— cylindriques pour étudier des rotations