

M2

Dynamique du point

Objectifs du chapitre

- 1 Connaître la notion de force.
- 2 Utiliser les forces usuelles (poids, force de rappel d'un ressort, tension d'un fil, forces de frottements fluide et solide, poussée d'Archimède)
- 3 Savoir établir un bilan des forces et en rendre compte sur une figure
- 4 Définir l'expression de la quantité de mouvement d'un point matériel
- 5 Définir le mouvement relatif d'un référentiel galiléen par rapport à un autre référentiel galiléen.
- 6 Connaître les 3 lois de Newton.
- 7 Déterminer les équation du mouvement d'un point matériel à l'aide de la deuxième loi de Newton.
- 8 Mettre en équation le mouvement sans frottement d'un point matériel et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant
- 9 Savoir étudier le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme en présence de frottement fluide.
- 10 Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique.
- 11 A l'aide d'un langage de programmation tracer la trajectoire d'un point matériel dans le cas d'une chute en présence de frottements.
- 12 Établir l'équation du pendule simple et justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
- 13 Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire.

Plan du cours

1 Forces et quantité de mouvement

- 1.1 Notion de force
- 1.2 La quantité de mouvement
 - a) Pour un point matériel
 - b) Pour un système de points

2 Quelques forces usuelles

- 2.1 Tension d'un fil
- 2.2 Force de rappel d'un ressort
- 2.3 Force gravitationnelle et poids
- 2.4 Poussée d'Archimède
- 2.5 Les forces de frottement solide
- 2.6 Les forces de frottement fluide

3 Les 3 lois de Newton

- 3.1 Première loi : Principe d'inertie
- 3.2 Deuxième loi : Principe fondamental de la dynamique
- 3.3 Troisième loi : Principe des actions réciproques

4 Méthode générale pour étudier un problème de mécanique

5 Chute libre sans frottement

- 5.1 Lois horaires
- 5.2 Étude de la trajectoire

6 Chute libre avec frottements fluides

- 6.1 Hypothèse de frottements linéaires avec la vitesse
- 6.2 Hypothèse de frottements quadratiques avec la vitesse

7 Étude du pendule simple

- 7.1 Position du problème

- 7.2 Étude des petites oscillations

8 Mouvement des planètes et des satellites

- 8.1 Orbites circulaires et période de révolution
- 8.2 Lois de Kepler

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'étude du mouvement en soi à travers l'étude cinématique. Maintenant, nous allons étudier les causes du mouvement, les forces. Grâce aux lois établis par Isaac Newton en 1687 dans son ouvrage *Philosophiae naturalis principia mathematica*, nous allons ensuite relier ces forces à la cinématique pour étudier le mouvement et ses causes. Il s'agit de l'étude dynamique.

1 Forces et quantité de mouvement

1.1 Notion de force

Tous les objets étudiés dans ce chapitre seront considérés comme matériels, et posséderont une masse noté m . On note $M(m)$ (point M de masse m)

Définition

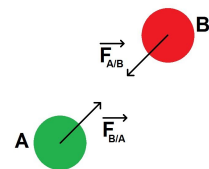
Les forces sont les actions mécaniques capables de modifier le vecteur vitesse d'un point matériel M ou de déformer un système. Ce sont les causes du mouvement. Une force est indépendante du référentiel d'étude, elle s'applique quelle que soit la façon dont le physicien étudie le système. Elle s'exprime en Newton (N).

Par exemple, la force gravitationnelle qu'une masse ponctuelle m_A exerce sur une masse ponctuelle m_B s'écrit :

$$\vec{F}_{A/B} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A}$$

avec :

- ε_0 la permittivité du vide
- $r = AB$ la distance entre les particules
- $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{r}$ vecteur unitaire
- $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ la constante de gravitation universelle.



De la même manière, la force électrostatique qu'une particule 1 de charge q_A exerce sur une particule 2 de charge q_B dans le vide vaut :

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{q_A q_B}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A}$$

avec :

- ε_0 la permittivité du vide
- $r = AB$ la distance entre les particules
- $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{r}$ vecteur unitaire

1.2 La quantité de mouvement

a) Pour un point matériel

Définition

Considérons un point matériel M de masse m dans un référentiel donné \mathcal{R} . Le vecteur vitesse de ce point matériel dans ce référentiel est noté $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. On définit **le vecteur quantité de mouvement** par :

$$\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Cette définition est vraie uniquement dans le cadre de la mécanique newtonienne, c'est-à-dire que l'on suppose toujours que $v \ll c$ avec c la célérité de la lumière dans le vide et v le module du vecteur vitesse.

b) Pour un système de points

Considérons un système fermé constitué d'un ensemble de points dans un référentiel \mathcal{R} . On entend par système fermé une délimitation de l'espace dans laquelle les points sont contraints de rester.

Définition

On définit **le centre de gravité** G d'un ensemble de points de position M_i et de masse m_i par la relation :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_i m_i \vec{OM}_i$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble S de points de position M_i et de masse m_i dans le référentiel \mathcal{R} est défini par :

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}) = m\vec{v}(G/\mathcal{R})$$

avec m la masse totale du système et G le centre de gravité du système.

2 Quelques forces usuelles

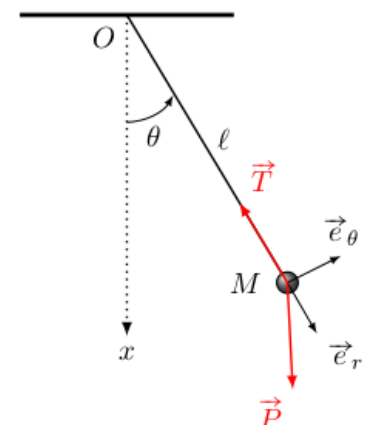
2.1 Tension d'un fil

Soit un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur L constante (**inextensible**).

Le fil retient la masse m en exerçant sur celle-ci une tension notée \vec{T} .

Caractéristiques :

- Force dirigée selon le fil
- Sens : de la masse vers le point d'attache
- Norme à déterminer (dépend des autres forces appliquées à M).



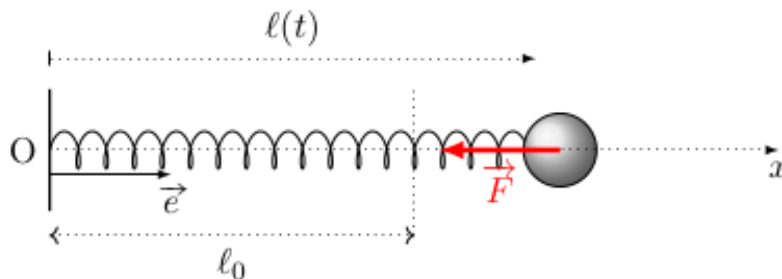
2.2 Force de rappel d'un ressort

Soit un ressort de **masse négligeable**, de **longueur à vide** l_0 et de **raideur** k à spires non jointives (ressort idéal). Lorsqu'il est faiblement déformé, l'élasticité naturelle du matériau tend à le faire revenir à sa configuration de départ.

Expérience Manipulation de ressorts

On constate que :

- Si le ressort est comprimé, une force apparaît qui tend à l'étirer.
- Si le ressort est étiré, une force apparaît qui tend à le comprimer.



Définition

Un ressort est caractérisé par :

- Sa longueur à vide l_0 (longueur au repos)
- Sa raideur k qui s'exprime en N/m.

La force de rappel d'un ressort est donnée par :

$$\vec{F}(t) = -k(l(t) - l_0)\vec{u}_{\text{sortant}}$$

avec $l(t)$ la longueur à l'instant t du ressort et \vec{u}_{sortant} le vecteur unitaire dirigé du point d'accroche vers l'extrémité libre du ressort.

La force exercée par le ressort sur la masse s'écrit :

$$\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\vec{u}_{\text{sortant}}$$

avec \vec{u}_{sortant} le vecteur unitaire dirigé du point d'attache du ressort vers la masse.

2.3 Force gravitationnelle et poids

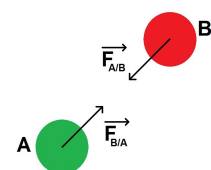
Un corps de masse M exerce sur un autre corps de masse m une force gravitationnelle.

Par exemple, la force gravitationnelle qu'une masse ponctuelle m_A exerce sur une masse ponctuelle m_B s'écrit :

$$\vec{F}_{A/B} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A}$$

avec :

- ε_0 la permittivité du vide
- $r = AB$ la distance entre les particules



- $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{r}$ vecteur unitaire
- $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ la constante de gravitation universelle.

Dans le cas de l'attraction gravitationnelle de la Terre sur un corps ponctuel, la Terre exerce la force :

$$\vec{F}_G = -G \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{e}_z$$

avec M_T la masse de la Terre, R_T le rayon terrestre et \vec{e}_z le vecteur vertical dirigé vers le haut.

Application 1: Force gravitationnelle

Dans le cas de l'attraction gravitationnelle de la Terre sur un corps ponctuel, la Terre exerce la force :

$$\vec{F}_G = -G \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{e}_z$$

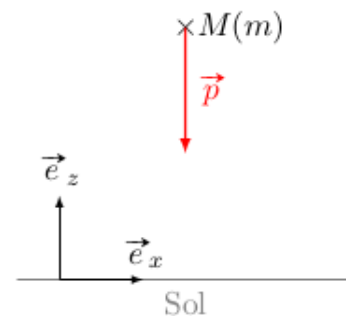
avec M_T la masse de la Terre, R_T le rayon terrestre et \vec{e}_z le vecteur vertical dirigé vers le haut. Faire l'application du coefficient $G M_T / R_T^2$ et donner son unité. On prendra $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6370 \text{ km}$ et $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Définition

A la surface de la Terre, la force d'attraction gravitationnelle exercée par la terre sur un objet ponctuel M de masse m s'appelle le poids et vaut :

$$\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$

avec \vec{g} l'accélération de la pesanteur de norme $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



2.4 Poussée d'Archimède

Définition

Soit un volume $V_{\text{immergé}}$ immergé dans un fluide de masse volumique ρ . La poussée d'Archimède est la force exercée par le fluide sur ce volume. Elle est égale à l'opposé du poids du volume du fluide déplacé et s'applique sur le centre de gravité du volume :

$$\Pi = -\rho V_{\text{immergé}} \vec{g}$$

Animation Balance hydrostatique

2.5 Les forces de frottement solide

Définition

On considère une masse m en contact avec un support et en mouvement à la vitesse \vec{v} par rapport à celui-ci. La **réaction** \vec{R} du support est la force exercée par le support sur la masse et s'applique au barycentre de la surface de contact. Cette réaction se décompose en deux forces :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

où \vec{N} est la force de réaction **normale** au support et \vec{T} est la force de réaction tangentielle au support de direction opposée à la vitesse.

Ces forces (\vec{N} et \vec{T}) vérifient les **lois de Coulomb** :

- Si le solide glisse sur la surface alors $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$
- Si le solide ne glisse pas sur la surface alors $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$

Le coefficient f est le coefficient de frottement (sans dimension). Un seul chiffre significatif, inférieur à 1 et qui dépend fortement de l'état de surface (humide, graissée,...) mais pas de la valeur de la surface. Si on suppose l'absence de frottements solides, on a $f = 0$ soit $T = 0$: la réaction du support est normale à la surface de contact.

Si $N = 0$ alors il n'y a plus de contact.

Expérience Coefficients de frottements

2.6 Les forces de frottement fluide

Un solide en mouvement dans un fluide (air, eau, huile ...) est freiné par les multiples interactions entre les particules de fluide et le point matériel considéré.

Exemple : La chute d'une bille est ralentie dans l'huile, la feuille d'arbre est ralentie par la résistance de l'air...

Cette force de frottement est modélisée de deux manières, selon la vitesse ou la nature du système étudié :

- Si v est faible $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ avec λ coefficient de frottement caractéristique du fluide et de la forme de l'objet en kg/s. Exemple : bille en mouvement dans un fluide visqueux.
- Si v est plus élevé avec $\vec{F} = -Kv\vec{v}$. La force est proportionnelle à v^2 . K s'exprime en kg/m. Exemple : force de traînée (sur un avion ou une voiture)

Remarques :

- Les coefficients de frottement fluides dépendent de la taille et de la forme du système étudié ainsi que de la nature du fluide.
- La force de frottement est toujours dirigée dans le sens opposé à celui du vecteur vitesse.
- La modélisation sera toujours donnée dans l'exercice considéré.

3 Les 3 lois de Newton

Les trois lois de Newton définies ici sont la base de toute la mécanique classique. Elles ont été établies en 1687 et permettent toujours de décrire une grande partie des mouvements mécaniques.

3.1 Première loi : Principe d'inertie

Définition

Il existe des référentiels privilégiés appelés **référentiels galiléens** dans lequel un point matériel M isolé, soumis à aucune action mécanique est :

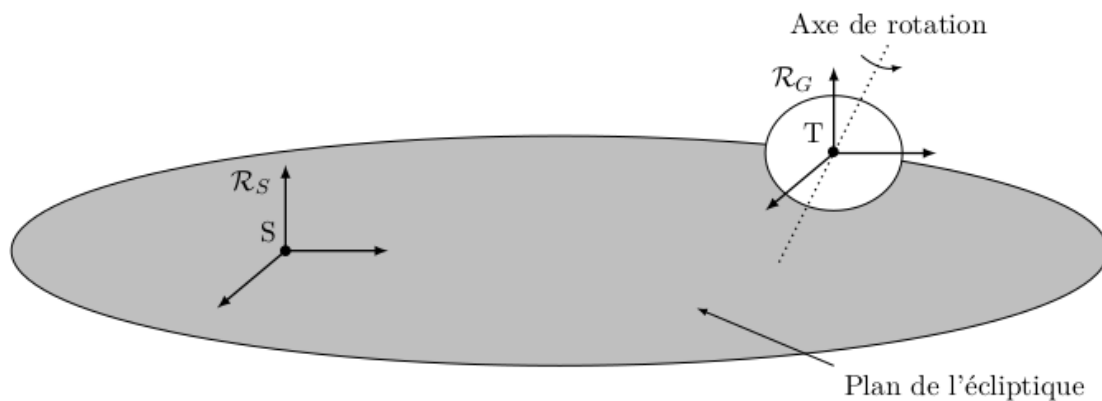
- soit au repos
- soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme

Si un point se trouve initialement au repos, il se maintient au repos. Exemples :

- Mobile autoporteur sur coussin d'air
- Palet de hockey sur une patinoire
- Mouvement des comètes lointaines

Exemples de référentiels galiléen :

- Le référentiel **terrestre** \mathcal{R}_T (ou encore appelé référentiel local ou du laboratoire) peut-être considéré comme galiléen (pour des expériences de durée inférieure à 24h).
- Le référentiel **géocentrique** \mathcal{R}_G : origine au centre de la terre et mêmes axes que le référentiel héliocentrique). Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif de la Terre autour du Soleil, soit une durée courte devant 1 année.
- Le référentiel **héliocentrique** \mathcal{R}_S : origine au centre du Soleil et axes dirigés vers 3 étoiles "fixes". Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif du Soleil dans la galaxie, soit une durée inférieure à plusieurs années.



Tous référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen

Animation Référentiels

3.2 Deuxième loi : Principe fondamental de la dynamique

Définition

Dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un point M de masse m vérifie :

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Soit la dérivée du vecteur quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées au point M .

Cette loi est l'une des lois les plus importantes de la physique. Elle permet de relier le mouvement cinématique - la dérivée de la vitesse - avec ses causes - les forces extérieures.

Lorsque le point d'étude et le référentiel sont bien précisés en début d'exercice (et uniquement dans ce cas!), on peut écrire simplement : $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = \vec{p} = m\vec{v}$. On remarque alors que :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dans le cas particulier d'un système de masse constante m , on retrouve l'expression :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

3.3 Troisième loi : Principe des actions réciproques

Définition

Soit deux points A et B en interaction. Si le point A exerce sur le point B une force $\vec{F}_{A/B}$ alors B exerce sur A une force $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$.

Les deux forces ont la même intensité, la même direction mais un sens opposé.

Animation Actions réciproques

4 Méthode générale pour étudier un problème de mécanique

Avant d'étudier en détails plusieurs exemples de mécanique, voici la méthode à utiliser systématiquement pour résoudre un problème de mécanique. Cette méthode doit être connue sans hésitations.

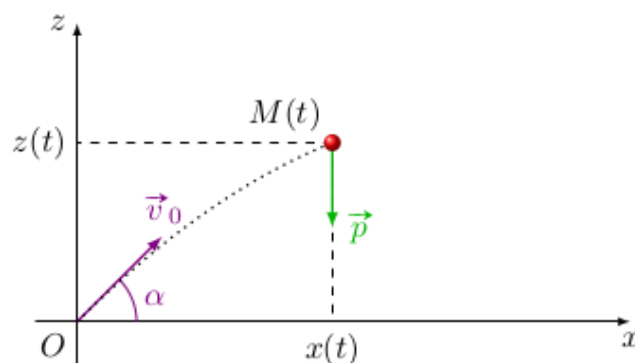
1. Définir le système étudié, préciser le référentiel galiléen d'étude, préciser le système de coordonnées (cartésiennes ou cylindriques) ;
2. Faire un schéma du système dans une situation **quelconque**.
Si le schéma est dans une situation particulière, on pourra avoir l'impression que certains vecteurs sont orthogonaux ou parallèles, ce qui faussera toute la suite du raisonnement.
3. Représenter les forces sur le schéma et réaliser un bilan des forces en donnant leurs expressions dans le référentiel d'étude.
Les forces sont indépendantes du référentiel, mais parfois leur expression analytique peut changer d'un référentiel à l'autre, notamment à cause des repères qui peuvent être très différents.
4. Appliquer la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique, PFD) en la citant.
5. Exprimer les vecteurs cinématiques position, vitesse et accélération dans les coordonnées choisies.
6. Projeter les équations vectorielles sur les vecteurs de base puis travailler sur les expressions scalaires selon les questions posées.

5 Chute libre sans frottement

5.1 Lois horaires

On considère un point matériel M lâché sans vitesse initiale. On cherche à décrire son mouvement.

1. Système étudié : point matériel M de masse m . Référentiel terrestre supposé galiléen. Le système est étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ supposé galiléen et on choisit des coordonnées cartésiennes avec un axe Oz dirigé vers le haut.
2. Schéma. On note α l'angle entre la vitesse initiale \vec{v}_0 et l'axe des x .



3. Bilan des forces : la seule force est le poids $\vec{p} = -mg\vec{e}_z$.
4. Seconde loi de Newton :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{p} = -mg\vec{e}_z$$

5. Le mouvement est plan, on peut donc anticiper que la coordonnée y est inutile. Les vecteurs cinématiques en coordonnées cartésiennes dans le plan du problème sont :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

6. On remplace l'accélération dans la seconde loi de Newton et il vient :

$$m\ddot{x}(t)\vec{e}_x + m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z$$

Par identification :

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad m\ddot{z} = -mg$$

Soit :

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -g$$

Lors d'une chute libre sans frottements, la masse du corps n'influe pas sur le mouvement. Cela signifie que dans le vide, tous les corps chutent à la même vitesse. Vidéo.

On en déduit, par intégration et en prenant en compte la vitesse initiale :

$$\boxed{x(t) = v_0 \cos \alpha t} \quad \text{et} \quad \boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t}$$

5.2 Étude de la trajectoire

Altitude maximale

D'un point de vue physique, le maximum de l'altitude $z(t)$ est donné lorsque la vitesse de montée \dot{z} change de signe. On montre que $\dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha$ et donc la vitesse s'annule au temps $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

L'altitude maximale h_{\max} (appelée **la flèche**) vaut donc :

$$\boxed{h_{\max} = z(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}$$

Distance parcourue

La distance parcourue par la masse est la distance nécessaire pour revenir au point d'altitude $z = 0$ (appelée la **portée**). On cherche donc le temps t_2 tel que :

$$z(t_2) = 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t_2$$

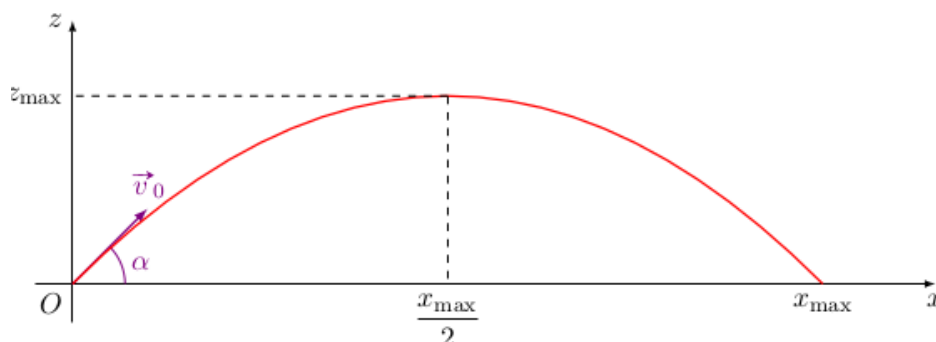
Il vient (si on exclut $t_0 = 0$) : $t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. La distance parcourue d_{\max} vaut donc :

$$d_{\max} = x(t_2) = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$$

Trajectoire

Pour trouver la trajectoire, il faut trouver $z(x)$. En remplaçant t par $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, il vient :

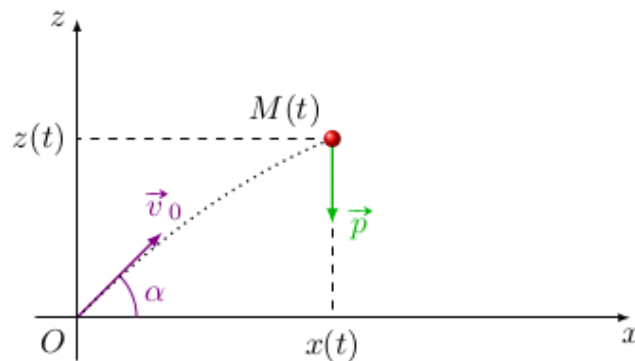
$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$



6 Chute libre avec frottements fluides

On reprend la méthode du paragraphe précédent où l'on étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec une vitesse initiale v_0 .

1. Le système d'étude est le point matériel de masse m . Sa position est repérée en fonction du temps par le point $M(t)$. Le système étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen et on choisit les coordonnées cartésiennes.
2. Schéma. $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{e}_x + v_{0,z}\vec{e}_z$



3. Bilan des forces : Le poids $\vec{p} = -mg\vec{e}_z$ et la force de frottement \vec{F}_f .
4. La seconde loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_f$$

6.1 Hypothèse de frottements linéaires avec la vitesse

On suppose que $\vec{F}_f = -\lambda\vec{v}$.

Position et vitesse

On a donc :

$$m\dot{v} = -\lambda\vec{v} - mg\vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \boxed{m\dot{v} + \lambda\vec{v} = -mg\vec{e}_z}$$

On projette cette relation sur les vecteurs de base, ce qui donne les équations du mouvement :

$$m\dot{v}_x + \lambda v_x = 0 \quad \text{et} \quad m\dot{v}_z + \lambda v_z = -mg$$

On reconnaît deux équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Il vient donc :

$$\boxed{v_x = v_{0,x} \exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{v_z = \left(v_{0,z} + \frac{mg}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right) - \frac{mg}{\lambda}}$$

Pour trouver les lois horaires $x(t)$ et $z(t)$ il faut intégrer les vitesses précédentes

Analyse du mouvement Le temps caractéristique vaut $\tau = \frac{m}{\lambda}$. On suppose que l'on étudie le mouvement sur un temps total T . Deux possibilités :

- $T \ll \tau$: On peut négliger le terme λv qui sera petit en ordre de grandeur devant $m \frac{dv}{dt}$. Les frottements sont donc négligeables et tout se passe comme si le mouvement correspondait à une chute libre sans frottements.
- $T \approx \tau$ ou plus. Dans ce cas le régime permanent sera atteint au cours de l'expérience, et la vitesse sera constante. La vitesse limite est donc :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = -\frac{mg}{\lambda}\vec{e}_z}$$

6.2 Hypothèse de frottements quadratiques avec la vitesse

On suppose que $\vec{F}_f = -\kappa v \vec{v}$. Dans ce cas la seconde loi de Newton devient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\kappa v \vec{v} - mg \vec{e}_z$$

La résolution analytique exacte de cette équation sort du cadre du programme. Comme précédemment, au bout d'un certain temps, on peut estimer que le système possèdera une vitesse limite ($\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$) tel que :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \vec{e}_z$$

En raisonnant comme précédemment, on peut, par analyse dimensionnelle, évaluer le temps d'évolution du système vers cette vitesse limite :

$$\tau = \frac{v_{\text{lim}}}{g} = \sqrt{m\kappa}g$$

Animation Animation d'une chute avec frottements

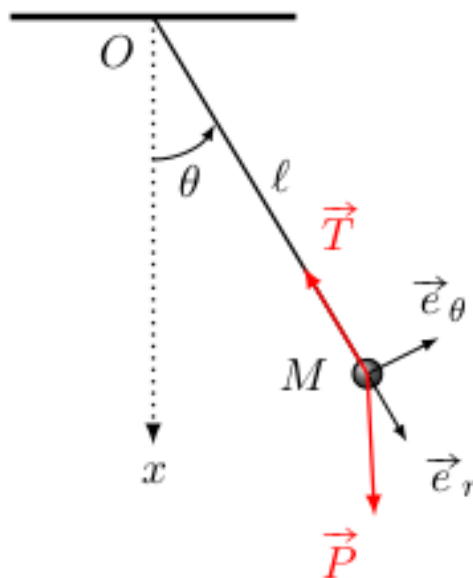
7 Étude du pendule simple

7.1 Position du problème

1. Plaçons nous dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le pendule est constitué d'une masse m au bout d'une tige inextensible et sans masse de longueur l . Pour étudier ce mouvement, nous nous plaçons en coordonnées cylindriques.

Le mouvement est plan donc à chaque instant $z(t) = 0$.

2. Schéma



3. Bilan des forces :

— le poids $\vec{p} = m \vec{g} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$

— La tension du fil $T = -T(t)\vec{e}_r$

4. Seconde loi de Newton :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T}$$

5. On recherche l'expression du vecteur accélération. On a $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$, $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et donc $\vec{a} = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

6. Projection :

$$\begin{aligned} -ml\dot{\theta}^2 &= mg \cos \theta - T \\ ml\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

La seconde équation sur \vec{e}_θ donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

7.2 Étude des petites oscillations

L'équation différentielle précédente peut se simplifier dans le cadre des petites oscillations. On rappelle le développement limité du sinus, lorsque l'angle est exprimé en radian, est $\sin x \approx x$. Cette expression reste une bonne approximation jusqu'à environ 40° . Dans ce cas l'équation devient simplement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

soit l'équation de l'oscillateur harmonique (cf cours suivant SP6). On peut réécrire cette équation en posant $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

8 Mouvement des planètes et des satellites

8.1 Orbites circulaires et période de révolution

On considère en première approximation que les trajectoires des planètes autour du Soleil ou celles des satellites autour d'une planète ou d'un astre sont circulaires.

- Système : corps (planète ou satellite) assimilé à un point M de masse m en orbite circulaire autour d'un corps attracteur O . (Faire schéma)
- Référentiel : géocentrique pour le mouvement d'un satellite autour de la Terre, héliocentrique pour le mouvement d'une planète autour du soleil. Galiléen.
- Coordonnées polaires

Bilan des forces :

— Force de gravitation $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$.

PFD :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

L'accélération en coordonnées polaires avec un rayon r constant s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On projette le PFD dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} -mr\dot{\theta}^2 &= -G\frac{mM}{r^2} \\ mr\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

La projection suivant \vec{e}_θ permet de déduire que $\dot{\theta} = cte$. La projection selon \vec{e}_r donne :

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^2} \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^3} \rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}}$$

La période de révolution est donnée par $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$ donc $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

8.2 Lois de Kepler

Expérience/Animation

Lois de Kepler

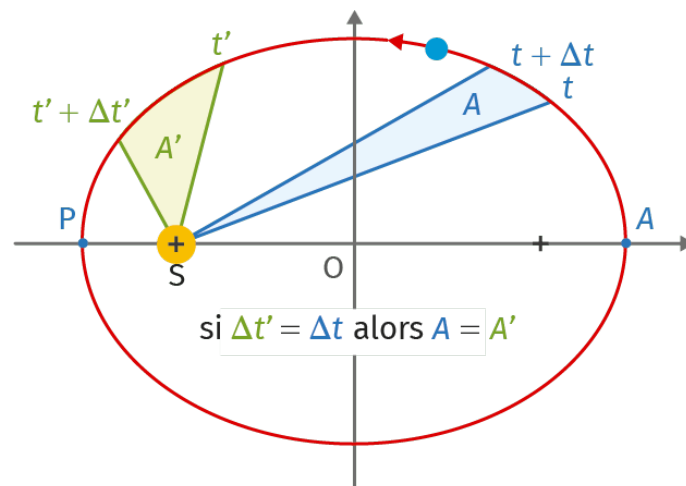
Définition

Première loi de Kepler : Dans le référentiel héliocentrique, les planètes ont pour trajectoire une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers

Pour de nombreuses planètes, la trajectoire est une ellipse quasiment équivalente à un cercle. Par exemple la variation de la distance Terre-Soleil est de 3% sur un an : de 147×10^6 km au périhélie (périgée) vers le 3 janvier à 152×10^6 km à l'aphélie (apogée) vers le 6 juillet.

Définition

Deuxième loi de Kepler : Le segment reliant le centre du Soleil au centre d'une planète balaye des aires égales pendant des durées égales. Ainsi, la planète va plus vite lorsqu'elle est proche de l'étoile.



Définition

Troisième loi de Kepler : Pour une planète ou un satellite de période de révolution T :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{MG} = \text{cte}$$

avec a le demi-grand axe de l'orbite elliptique (en m) et T en s. Dans le cas d'une orbite circulaire le demi-grand axe a est égal au rayon du cercle r .