M3 Puissance et énergie du point matériel

Objectifs du chapitre

1. Connaître les notions de travail et de puissance d'une force
2. Savoir reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force
3. Connaître le théorème de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique et savoir utiliser la loi appropriée en fonction du contexte.
4. Connaître les notions d'énergie potentielle et énergie mécanique.
5. Établir et citer les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.
6. Connaître la notion de mouvement conservatif.
7. Distinguer les notions de force conservative et non conservative.
8. Être capable de reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique et savoir utiliser les conditions initiales.
9. Établir l'équation d'un mouvement conservatif à partir de l'énergie potentielle.
10. Déduire d'une courbe d'énergie potentielle le comportement qualitatif d'un système dont on connaît l'énergie mécanique : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
11. Déduire d'une courbe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre et le caractère stable ou instable de ces positions.

Plan du cours

L'énergie est la capacité d'un système à modifier un état, à produire un travail entraînant un mouvement, un rayonnement ou de la chaleur.

1 Puissance d'une force

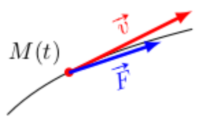
Définition

La puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est :

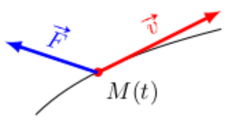
$$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$$

Propriétés :

- La puissance s'exprime en Watt (W).
- Elle dépend du référentiel.
- C'est une grandeur algébrique.
- $P = \|\vec{F}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$
  - Si $P > 0$: la force est orientée dans le sens du déplacement : **force motrice**
  - Si $P < 0$, la force est orientée dans le sens opposé du déplacement : **force résistive** ou **résistante**
  - Si $P = 0$ la force est orthogonale au déplacement.



▶ $\vec{F} \cdot \vec{v} > 0$: la force est motrice.



▶ $\vec{F} \cdot \vec{v} < 0$: la force est résistive.

Application 1: Caractère moteur ou résistant d'une force

La force de frottement fluide est-elle résistive ou motrice ? Et le poids ?

2 Travail d'une force

2.1 Travail élémentaire

Soit un point matériel M en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ soumis à une force $\vec{F}$.

Définition

Le travail élémentaire δW de la force $\vec{F}$ entre t et $t + dt$ d'une force δW par :

$$\boxed{\delta W = P(\vec{F}).dt = \vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

où $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est le déplacement infinitésimale de la masse pendant dt (**déplacement élémentaire**).
Le travail élémentaire s'exprime en Joule.

Si $\vec{F}$ est orthogonal au mouvement, $\delta W = 0$. **La force ne travaille pas.**

2.2 Travail total

Définition

On définit le travail W fourni par la force entre les points A et B par :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

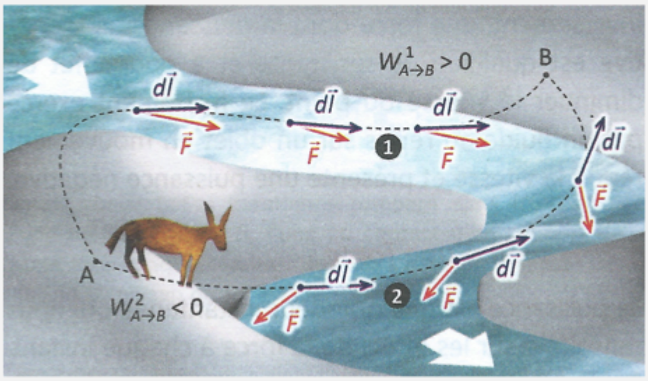
Si $W_{A\to B} = 0$ on dit que la force ne travaille pas entre les points A et B. Comme la puissance, on emploie les termes de résistif ou moteur selon le signe du travail.

Remarques La notation δ signifie que c'est le calcul d'une variation au cours d'un déplacement, en effet, la plupart du temps, le travail d'une force entre deux points dépend du chemin suivi entre ces deux points. Nous aurions noté un d s'il s'agissait d'une différence de grandeurs entre les deux points.

2.3 Propriété fondamentale

Le travail fourni par une force pour que le point matériel aille d'un point à un autre dépend du chemin suivi.

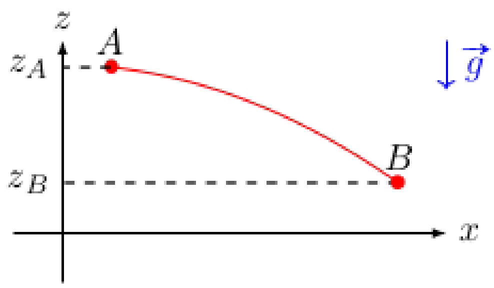
Exemple Dans l'exemple suivant, l'âne a deux possibilités pour aller de A vers B mais il doit se confronter à la force $\vec{F}$ due au courant. Tout le long du chemin 1, $\vec{F}.\overrightarrow{dl} > 0$ donc $W^1_{A\to B} > 0$ alors que pour le chemin 2 on a $\vec{F}.\overrightarrow{dl} < 0$ donc $W^2_{A\to B} < 0$. Le travail dépend donc du chemin suivi.



2.4 Exemple de travaux

a) Travail du poids

Calculons le travail du poids $\vec{p}$ d'un corps de masse m se déplaçant d'un point A repéré par sa côte z_A à un point B repéré par sa côte z_B.



En coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$. Ainsi $\delta W = m\vec{g}.\overrightarrow{dl} = -mgdz$ soit :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = -mg \int z_A^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B) = mgh$$

On remarque que si la masse se déplace horizontalement, le travail du poids est nul, cette force ne fournit ou ne prélève alors pas d'énergie.
On retiendra que $W_{A\to B}(\vec{P}) = \pm mgh$ avec h la dénivellation, et on déterminera le signe en fonction du mouvement :

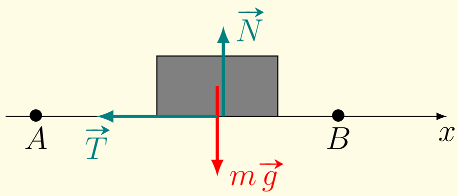
— $(+)$ si le poids est moteur (descente)
— (-) si le poids est résistant (montée).

Le poids est indépendant du chemin parcouru.

b) Travail d'une force de frottement solide

Application 2: Travail d'une force de frottement solide

On considère un objet qui glisse sur un plan horizontal et soumis à une force de frottement solide de coefficient f vérifiant les lois de Coulomb : $\|\vec{T}\| = fmg$ avec $\vec{T}$ opposé à la vitesse de glissement.



Montrer que la force de réaction normale ne travaille pas et que le travaille de la force de réaction tangentielle entre un point A et un point B vaut :

$$W_{A\to B} = -T(x_B - x_A) = -fmg(x_B - x_A)$$

Quel est son signe ?

3 Forces conservatives et énergie potentielle

3.1 Définition

À nouveau, plaçons nous dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Nous étudions le mouvement du point matériel M de masse m soumis à une force notée $\vec{F}$. Nous avons vu que le travail $W_{A\to B}$ de la force $\vec{F}$ dépend à priori du chemin suivi pour aller de A vers B.
Toutefois, il existe des forces particulières pour lesquelles ce travail ne dépend jamais du chemin suivi, comme le poids ou pour la force de rappel du ressort.
Dans ce cas, on peut définir l'énergie potentielle comme étant le travail fourni par la force pour aller d'un point de référence O au point étudié M. En effet, comme le travail ne dépend pas du chemin suivi, le

travail de A à B est égal au travail de A à O plus celui de O à M. Ce point de référence est généralement choisi selon des critères liés au calcul.

Définition

Une force est conservative si son travail dans un référentiel $\mathcal{R}$ entre deux points A et B **ne dépend pas du chemin suivi**. Elle admet alors une énergie potentielle.

L'énergie potentielle (ne dépendant que de la position) est telle que la variation d'énergie potentielle soit égale à l'opposé du travail :

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W_{A\to B}$$

On peut également définir la "petite variation d'énergie potentielle" : $\mathrm{d}E_p = -\delta W$.

Ainsi, si on un mouvement de translation sur x : $\delta W = \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F_x \mathrm{d}x$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -F_x$

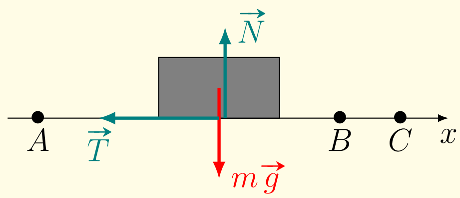
On dit que F dérive d'une énergie potentielle. L'énergie potentielle est toujours définie à une constante près.

Remarques

- Le poids est une force conservative, on peut lui associer une énergie potentielle.
- Les frottements dissipent de l'énergie par transfert thermique. Les frottements sont donc des forces non conservatives, on ne peut pas leur associer d'énergie potentielle.

Application 3: Forces conservatives

On considère un objet qui glisse sur un plan horizontal et soumis à une force de frottement solide de coefficient f vérifiant les lois de Coulomb : $\|\vec{T}\| = fmg$ avec $\vec{T}$ opposé à la vitesse de glissement.



Exprimer le travail pour aller de A à B par deux chemins : soit directement, soit en passant par C.

1. De A à B, le vecteur vitesse de l'objet est dirigé selon $+\overrightarrow{u_x}$, de plus, le support est fixe dans le référentiel d'étude, donc la vitesse de glissement est dirigée selon $+\overrightarrow{u_x}$. D'après la loi de Coulomb, $\overrightarrow{R_T}$ est dirigé selon $-\overrightarrow{u_x}$, connaissant sa norme, on peut écrire : $\overrightarrow{R_T} = -fmg\overrightarrow{u_x}$.
   $W_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = \int_A^B \overrightarrow{R_T}\cdot\underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{=\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}} = \int_A^B -fmg\mathrm{d}x$, soit $\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = -fmg(x_B - x_A) < 0}$
2. De A à C, le mouvement a lieu selon $+\overrightarrow{u_x}$, et donc $\overrightarrow{R_T} = -fmg\overrightarrow{u_x}$.
   Attention, de C à B le mouvement a lieu selon $-\overrightarrow{u_x}$, donc $\overrightarrow{R_T}$ est selon $+\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{R_T} = +fmg\overrightarrow{u_x}$.
   $W'_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = \int_A^C \underbrace{\overrightarrow{R_T}}_{-fmg\overrightarrow{u_x}}\cdot\underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{=\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}} + \int_C^B \underbrace{\overrightarrow{R_T}}_{+fmg\overrightarrow{u_x}}\cdot\underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{=\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}} = \int_A^C -fmg\mathrm{d}x + \int_C^B +fmg\mathrm{d}x$
   Soit $\boxed{W'_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = -fmg(x_C - x_A) + fmg(x_B - x_C) = -fmg(2x_C - x_A - x_B)}$
3. On constate que $W'_{AB}(\overrightarrow{R_T}) \neq W_{AB}(\overrightarrow{R_T})$: le travail de $\overrightarrow{R_T}$ dépend du chemin suivi, ce n'est donc pas une force conservative !

3.2 Energie potentielle de pesanteur

En prenant un axe z ascendant, on a $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$. Alors $\delta W(\vec{P}) = \vec{P}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -mg\mathrm{d}z$.
Le travail ne dépend pas du chemin suivi, le poids est donc une force conservative.
On a alors $\mathrm{d}E_p = -\delta W(\vec{P}) = mg\mathrm{d}z$, l'énergie potentielle de pesanteur est alors $E_p = mgz + cte$.

On retiendra :

$$E_p = mgz + cte \quad \text{si Oz est ascendant}$$
$$E_p = -mgz + cte \quad \text{si Oz est descendant}$$

L'énergie potentielle de pesanteur doit toujours augmenter avec l'altitude.

3.3 Énergie potentielle élastique

Soit un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. ON pose $x = l$. Ainsi $\vec{\mathrm{d}l} = dx\vec{e}_x$. La force appliquée par le ressort sur M est :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -k(l - l_0)\vec{e}_x$$

Le travail élémentaire de cette force est :

$$\delta W = \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -k(l - l_0)\vec{e}_x.\mathrm{d}l\vec{e}_x = -k(s - l_0)\mathrm{d}x$$

Ainsi $\mathrm{d}E_p = k(x - l_0)\mathrm{d}x$ d'où :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + cte}$$

L'énergie potentielle du ressort est toujours positive. En effet, qu'il soit comprimé ou étiré, il force toujours M à revenir vers sa position d'équilibre.

4 Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

4.1 Définition de l'énergie cinétique

Définition

L'énergie cinétique, notée E_c, exprimée en Joule, d'un point matériel M de vitesse v dans un référentiel $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

L'énergie cinétique dépend de la vitesse, donc du référentiel d'étude.

4.2 Théorème de la puissance cinétique

Enoncé Dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen on considère un point M de masse m sur lequel s'applique d'un ensemble de forces notés $\vec{F}$. Nous pouvons appliquer la seconde loi de Newton soit :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{soit} \quad m\vec{a}.\vec{v} = \vec{F}.\vec{v}$$

Cette relation peut s'exprimer dans tous les systèmes de coordonnées, en particulier en coordonnées cartésiennes :

$$m\vec{a}.\vec{v} = m\left(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}\right) = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

où nous avons utiliser la relation mathématique $(f^2)' = 2ff'$. Il vient donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.\vec{v} = \mathcal{P}}$$

Application au pendule simple

Application 4: Pendule simple

On considère un pendule simple : une masse m est suspendue à un fil sans masse inextensible de longueur l dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En utilisant le théorème de la puissance cinétique, retrouver l'équation différentielle du pendule sur $\theta(t)$.

4.3 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de la puissance cinétique permet de relier la variation instantanée d'énergie cinétique à la puissance. S'il est très utile d'un point de vue conceptuel, il aura au final assez peu d'utilité pratique. Toutefois, la version intégrée de ce théorème, qui relier la variation globale d'énergie cinétique, permet des calculs de vitesse particulièrement efficaces.
Partons du théorème de la puissance cinétique et intégrons le entre un point A et un point B. On a :

$$\int_A^B \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \int_{t_A}^{t_B} P(\vec{F})dt = W_{A\to B}(\vec{F})$$

Soit :

Définition

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = W_{A\to B}(\vec{F})}$$

La variation de l'énergie cinétique du point M entre deux points A et B est égale au travail des forces appliquées au cours de son déplacement.

Application 5: Application du TEC

Une masse m est en chute libre sans frottements, quelle est sa vitesse après avoir chuté d'un dénivelé de 100 m ?

5 Théorèmes de la puissance et de l'énergie mécanique

5.1 Définition de l'énergie mécanique

Supposons qu'un point M subissent deux types de forces :

— Des forces non conservatives $\vec{F}_{nc}$

— Des forces conservatives $\vec{F}_c$ dérivant d'une énergie potentielle E_p ($W_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta E_p$.

Définition

On définit l'énergie mécanique du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ par :

$$E_m = E_c + E_p$$

L'énergie mécanique est définie à une constante près à cause de la définition de l'énergie potentielle.

5.2 Théorème de l'énergie mécanique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au système :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F}) = W_{AB}(\vec{F}_c) + W_{AB}(\vec{F}_{nc})$$

or $W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -E_p(B) + E_p(A)$, ainsi :

$$E_c(B) - E_c(A) + E_p(B) - E_p(A) = W_{AB}(\vec{F}_{nc})$$

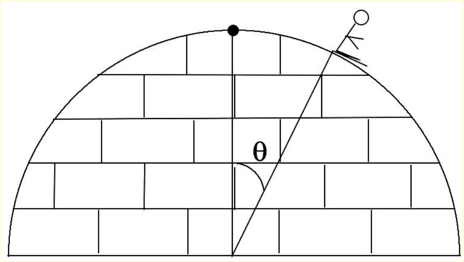
Théorème de l'énergie mécanique (TEM) :

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{F}_{nc})}$$

Application 6: Application du TEM

A l'aide du théorème de l'énergie mécanique établir l'équation du mouvement de l'enfant glissant sur l'igloo (de rayon R) :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$$



5.3 Théorème de la puissance mécanique

En dérivant par rapport au temps, on trouve :

Théorème de la puissance mécanique (TPM) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P(\vec{F}_{nc})}$$

Ces théorèmes ont la même structure que ceux de l'énergie cinétique, mais en ne considérant que les forces non conservatives. Ils seront très utile en l'absence de forces non conservatives ou si ces dernières ne travaillent pas.
L'énergie mécanique se conserve uniquement si toutes les forces sont conservatives.

6 Les mouvements conservatifs : l'exemple du pendule simple

6.1 Utilisation de la courbe d'énergie potentielle pour prévoir une trajectoire oscillante

- Système d'étude : masse m
- Référentiel terrestre supposé galiléen
- Coordonnées polaires

En coordonnées cylindriques, le fil étant inextensible, la vitesse de la masse m vaut :

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

La tension du fil est toujours orthogonale à la vitesse, elle ne travaille pas. Le poids est une force conservative, ainsi :

$$E_p = -mgx_M + cte$$

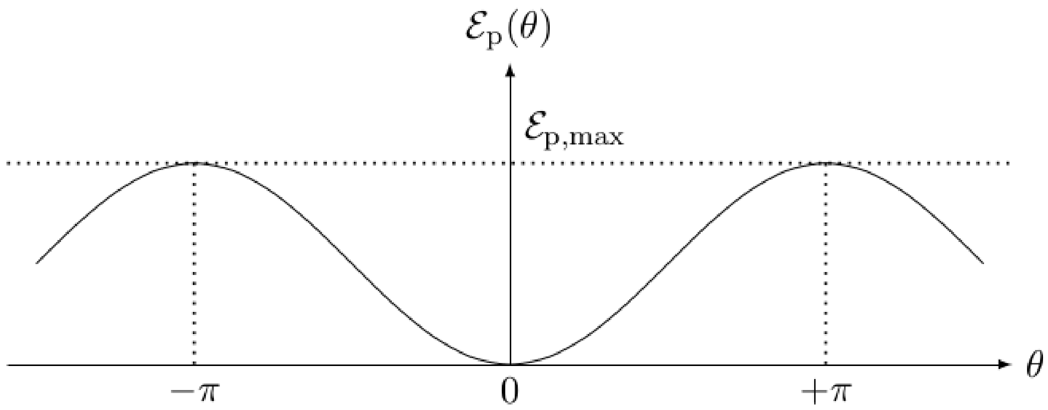
La variable adaptée est θ : $x = l\cos\theta$ d'où :

$$E_p = -mgl\cos\theta + cte$$

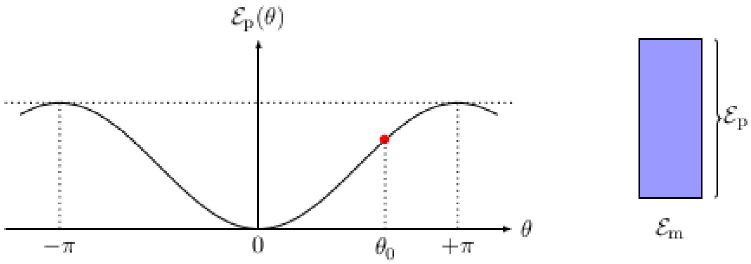
On choisit $E_p(\theta = 0) = 0$ donc :

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$$

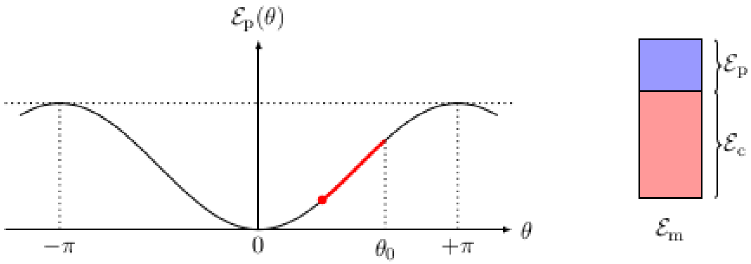
On peut tracer l'énergie potentielle en fonction de l'angle θ :



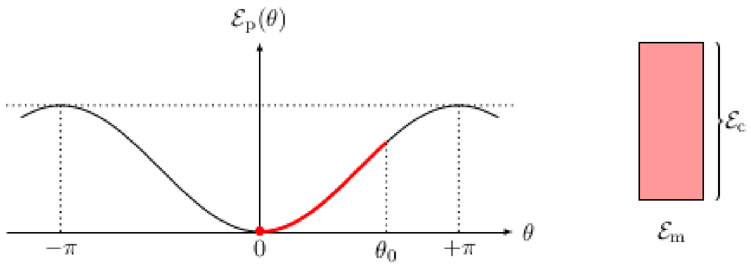
On remarque que l'énergie potentielle admet un maximum $E_{\text{p,max}} = 2mhl$ pour les angles $\theta_{\text{max}} = \pi[2\pi]$ alors que l'énergie est minimale pour $E_{\text{p,min}} = 0$ pour $\theta_{\text{min}} = 0[2\pi]$.
Considérons un état initial du pendule lâché à un angle θ_0 sans vitesse initiale. Au départ, il a une énergie potentielle $E_p(\theta_0) = mgl(1 - \cos\theta_0)$. Comme la particule n'a pas de vitesse, son énergie cinétique est nulle. Ainsi l'énergie mécanique du pendule vaut $E_m = E_p(\theta_0)$. Le mouvement est ensuite décrit à l'aide des courbes d'énergie potentielle de la figure suivante. Au cours d'une trajectoire, la masse va parcourir l'ensemble de la courbe d'énergie potentielle telle que. $E_p(\theta) \leq E_m = E_p(\theta_0)$. Pour tous les points où l'énergie potentielle est rigoureusement inférieure à l'énergie maximale, une partie de l'énergie sera sous forme cinétique. Cette étude graphique permet de prédire que le mouvement de la masse sera un mouvement oscillant, car il n'y a pas assez d'énergie fournie initialement pour dépasser les maximum d'énergie potentielle, on dit que la particule est piégée dans un puits de potentiel.



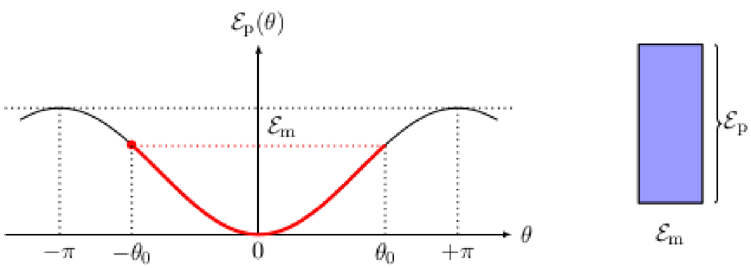
(a) État initial $\theta = \theta_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, la vitesse est nulle.



(b) La masse perd de l'énergie potentielle en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.



(c) La masse a perdu toute son énergie potentielle. Son énergie cinétique, et donc sa vitesse, est maximale.



(d) La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximal $-\theta_0$. Ensuite, la masse repart dans l'autre direction et oscille.

a) Les points d'équilibres

— $\theta_0 = 0$ Position d'équilibre stable

— $\theta_0 = \pi$ Position d'équilibre instable

6.2 Équilibre et stabilité

Un point M est en équilibre si $\vec{a} = \vec{0}$ donc $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Pour une force conservative, $\vec{F} = \vec{0}$, donc pour un mouvement à un degré de liberté :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{\mathsf{eq}}) = F_x(x_{\mathsf{eq}}) = 0$$

L'équilibre ne peut avoir lieu que si E_p est extrémale. On peut faire l'analogie entre la courbe E_p et le profil d'une montagne : on ne peut pas rester en équilibre sur une pente.
On distingue deux cas d'équilibre :

— **L'équilibre stable** : si on déplace la particule de sa position d'équilibre elle a tendance à y revenir. C'est un minimum de E_p. : $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\mathsf{eq}}) > 0$.

— **L'équilibre instable** : si on déplace la particule de sa position d'équilibre, elle a tendance à s'en éloigner. C'est un maximum de E_p : $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\mathsf{eq}}) < 0$.

6.3 Mouvement de type fronde

Prenons maintenant θ_0 quelconque mais $\dot{\theta}_0 > 0$ tel que $E_m > E_{p,max}$. Dans ce cas la particule aura suffisamment d'énergie pour passer la barrière de potentiel, et continuera à parcourir la courbe. Le pendule fait des tours complets, il s'agit d'un mouvement de type fronde.