M4 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Objectifs du chapitre

1. Savoir distinguer un solide d'un système déformable
2. Connaître le mouvement de rotation autour d'un axe fixe d'un solide : savoir décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance par rapport à l'axe et de sa vitesse angulaire.
3. Connaître le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe.
4. Exploiter la relation pour le solide entre moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
5. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
6. Savoir calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté, en privilégiant l'utilisation du bras de levier.
7. Définir un couple de force, le moment d'un couple.
8. Savoir définir une liaison pivot et justifier la valeur du moment qu'elle peut produire.
9. Savoir déterminer l'équation du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (avec le moment d'inertie fourni).
10. Établir l'équation du mouvement du pendule pesant. Établir une intégrale première du mouvement.
11. Connaître et utiliser l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (avec le moment d'inertie fourni).
12. Connaître le théorème de l'énergie cinétique d'un solide en rotation et établir l'équivalence entre théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.
13. Prendre en compte le travail des forces intérieures pour un système déformable. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide.
14. Réaliser le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

Plan du cours

1 La cinématique du solide

1.1 Définition d'un solide

Définition

Un **solide indéformable** est un ensemble de points tel que la distance entre deux points quelconques d'un solide reste la même au cours du temps

Ce modèle est valable pour de nombreux systèmes concrets (stylo, boule de bowling ou billard...). Par opposition, une feuille de papier est un solide déformable.

1.2 Translation

Considérons un solide dans un référentiel $\mathcal{R}$.

Définition

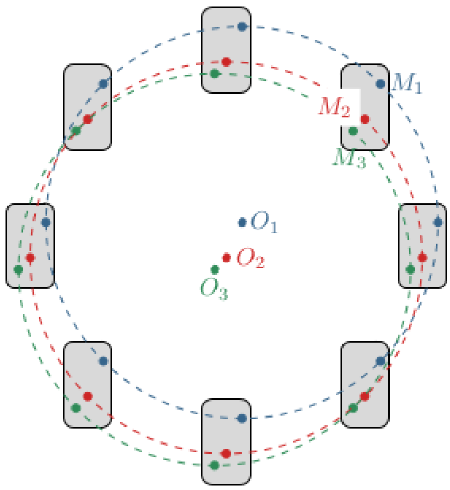
Un solide est en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ si tous points M_1 et M_2 le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ garde une direction constant par rapport à ce référentiel tout au long du mouvement.

La translation rectiligne

Si la trajectoire de chaque point du solide est un segment de droite, alors la translation est dite rectiligne. Exemple : une cage d'ascenseur ou une voiture circulant sur une route droite sont en translations rectilignes

La translation circulaire

Si la trajectoire de chaque point d'un solide **en translation** est un arc de cercle, alors la translation est dite **circulaire**. Exemple : le mouvement des nacelles d'une grande roue.



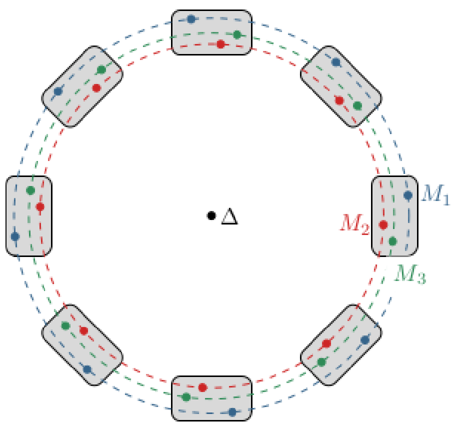
Pour une translation circulaire, les cercles trajectoires ont tous le même rayon mais pas le même centre.

1.3 Rotation autour d'un axe fixe

Considérons un solide dans un référentiel $\mathcal{R}$ et Δ un axe fixe dans ce référentiel.

Définition

Un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ lorsque tous les points du solide possèdent un mouvement circulaire autour de cet axe.



La trajectoire de chaque point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est un cercle, inclus dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et dont le centre est sur l'axe, mais tous les cercles trajectoire n'ont pas le même rayon.

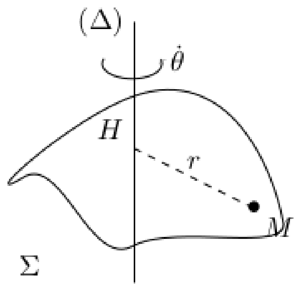
Application 1: Balle de ping-pong

Une balle de ping-pong se déplace en ligne droite en tournant sur elle-même. Est-ce une translation ? Une translation rectiligne ?

Vitesse de rotation

Soit un solide Σ en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe fixe Δ. Soit un point M quelconque appartenant à Σ. Notons H le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ et r la distance HM. Ces notations sont représentées sur la figure ci-dessous.
Dans ce cas, le point M est en rotation autour de H animé d'une vitesse :

$$\boxed{\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$



Chaque point du solide a une vitesse différente.

Application 2: Vitesse de rotation

La vitesse de rotation du rotor d'une éolienne est d'environ 12 tours/minutes. Sachant que certaines pales ont une longueur de 60 m, en déduire la vitesse de l'extrémité de la pale.

2 Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation

2.1 Moment cinétique scalaire

Définition

Soit un solide Σ en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe fixe Δ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Le moment cinétique scalaire L_Δ par rapport à l'axe Δ est définit par :

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta\dot{\theta} = J_\Delta\omega}$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ (en $\mathrm{kg \cdot m^2}$). Le moment cinétique est en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$.

Le moment cinétique joue le même rôle pour une rotation que la quantité de mouvement pour une translation.

2.2 Moment d'inertie par rapport à un axe

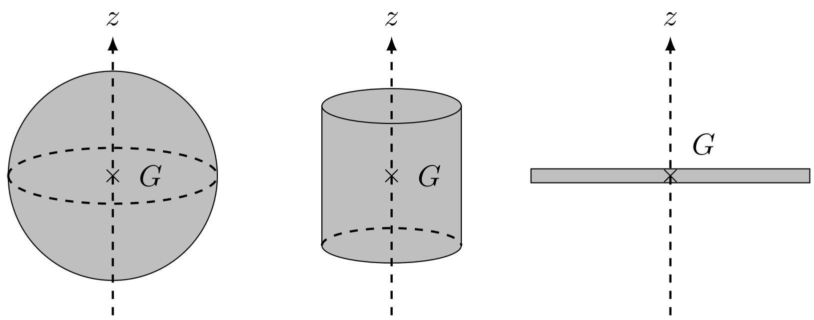
Considérons le solide de la figure ci-dessus. La distribution de masse du solide autour de l'axe Δ facilite ou freine la rotation.

Tout comme la masse caractérise la faculté d'un solide à se déplacer, le moment d'inertie par rapport à un axe J_Δ caractérise la faculté d'un solide à tourner autour d'un axe Δ.

On peut montrer que $J_\Delta = \sum_\Sigma r^2 \mathrm{d}m$ avec r la distance de l'élément d'intégration à l'axe Δ. Autrement dit, plus la masse est éloignée de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie augmente, et donc plus il sera difficile de mettre le solide en rotation autour de cet axe.
Par exemple, le moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon R vaut $J_\Delta = mR^2/2$ tandis que le moment d'inertie d'un cylindre creux de rayon R vaut $J_\Delta = mR^2$.
Le moment cinétique d'un système isolé est une grandeur conservée, un patineur qui tourne en ouvrant ou en fermant les bras, modifie son moment d'inertie et donc sa vitesse de rotation.

Pour des solides de masse m, plus les masses sont réparties loin de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est grand.

Solide	J_{Oz}
Cylindre de rayon R	$mR^2/2$
Boule de rayon R	$2mR^2/5$
Barre de longueur L	$mL^2/12$



3 Moment scalaire d'une force

3.1 Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Définition

Considérons dans un référentiel $\mathcal{R}$ un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$. Soit Δ un axe passant par O de vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$. On appelle **moment de la force** $\vec{F}$ par rapport à l'axe Δ :

$$\boxed{M_\Delta(\vec{F}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta}$$

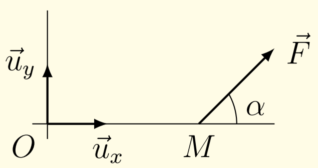
C'est un scalaire et son unité est le newton-mètre (N.m).

Physiquement, le moment représente l'efficacité d'une force appliquée en un point M à mettre ce dernier en rotation autour d'un point O.

Application 3: Moment scalaire d'une force

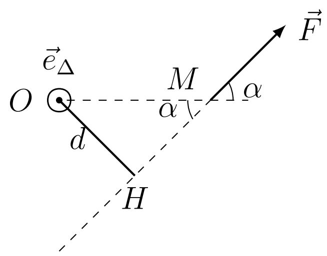
Un point M a pour coordonnées $(x_0, 0, 0)$ où x_0 est une constante positive. Une force $\vec{F}$ s'applique sur le point M. Cette force, de norme F, est parallèle au plan xOy et fait un angle α par rapport à Ox.

1. Calculer $M_{Oz}(\vec{F})$



3.2 Notion de bras de levier

Prolongeons la direction de la force $\vec{F}$? On obtient sa **droite d'action**. On appelle H le projeté orthogonal de O sur la droite d'action de la force $\vec{F}$.



On obtient alors la relation :

$$M_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta = \left((\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{F}\right).\vec{e}_\Delta = (\overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta$$

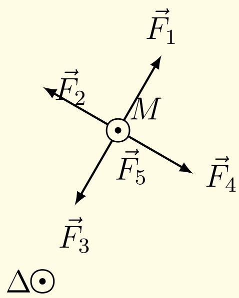
car $\overrightarrow{HM} // \vec{F}$. On en déduit alors l'expression :

$$\boxed{M_\Delta(\vec{F}) = \pm d \|\vec{F}\|}$$

— Le signe se détermine par l'utilisation de la règle du tire-bouchon. Si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens de l'orientation de Δ, le signe est $+$. Sinon, si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens opposé de l'orientation de Δ le signe est $-$.

Application 4: Bras de levier

1. Reprendre l'application précédente en utilisant le bras de levier.
2. Sur la figure ci-contre sont représentés un axe Δ et 5 forces. Calculer les moments scalaires de ces 5 forces de même norme $F = \|\vec{F}_i\|$ par rapport à l'axe Δ. La distance de M à l'axe Δ est notée r.

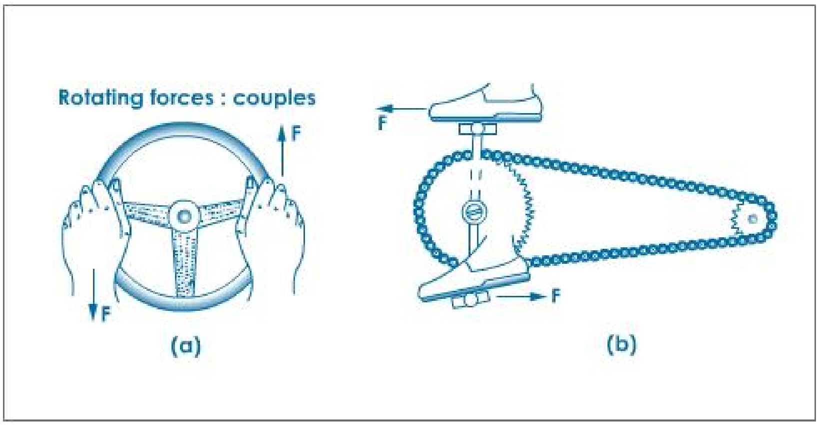


3.3 Couple de forces

Définition

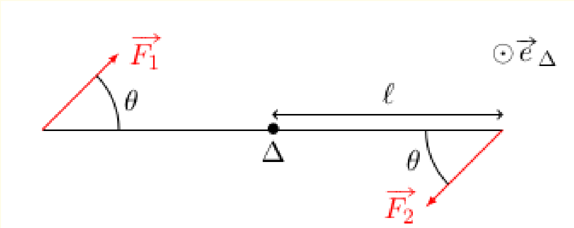
Un couple, noté en général C et un ensemble de forces de points d'applications différents dont la résultante est nulle ($\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$) mais dont la somme des moments est non nulle

Exemples de couples : ouverture d'un robinet, rotation d'un volant de voiture, pédalier d'un vélo...



Application 5: Couple de forces

Montrer que le couple des actions qu'exerce un opérateur pour débloquer une valve vaut, avec les notations du schéma, $C = -2F\ell \sin\theta$.



3.4 La liaison pivot

Un solide présente à priori 6 degrés de liberté (3 degrés de liberté en translation et 3 en rotation). Afin de permettre uniquement le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe, on utilise une liaison pivot.

Définition

Une liaison pivot est une liaison n'autorisant à un solide qu'un seul degré de liberté de rotation autour d'un certain axe. (exemple : roue de roller)
Une liaison pivot est dite parfaite si le moment des actions par rapport à l'axe Δ est nul : $M_\Delta = 0$.

4 Théorème du moment cinétique

Définition

Plaçons nous dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Considérons un solide Σ en rotation autour d'un axe fixe Δ et de moment d'inertie J_Δ par rapport à cet axe. La dérivée temporelle du moment cinétique L_Δ par rapport à l'axe Δ est égale au moment des forces appliquées par rapport à Δ :

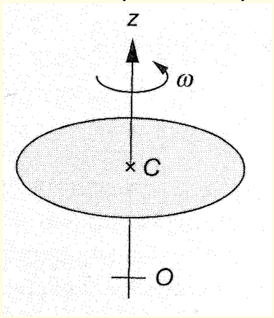
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,ext} M_{i,\Delta}} \quad \text{soit} \quad \boxed{J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_{i,ext} M_{i,\Delta}}$$

Application 6: Analogies

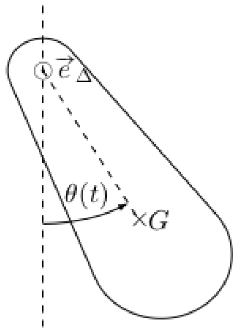
Exprimer les analogies entre le théorème du moment cinétique et le principe fondamentale de la dynamique.

Application 7: Liaison pivot

1. Considérons un disque en pivot parfait autour de l'axe Oz. Ce disque est initialement lancé à la vitesse angulaire ω_0. Évaluer l'évolution de la vitesse angulaire.
2. La liaison pivot n'est plus parfaite et engendre un couple de frottement $\mathcal{C} = -\alpha\omega$ où α est une constante positive. Répondre à la même question que précédemment.



5 Exemple du pendule pesant



On considère un pendule pesant constitué d'un solide S de masse M et de centre d'inertie (ou de gravité G). Il peut entrer en rotation autour de l'axe Δ passant par le point O comme représenté sur la figure ci-dessous. On note J_Δ son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ et ℓ la distance OG

Application 8: Le pendule pesant

1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :
$$J_\Delta \ddot{\theta}(t) = -mg\ell \sin\theta(t)$$
2. Montrer que ce pendule est équivalent à un oscillateur pour de petites oscillations
3. Montrer que la quantité :
$$\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta$$
est constant au cours du mouvement. Il s'agit d'une **intégrale première du mouvement**

Le portrait de phase

A l'aide de l'intégrale première, on peut remarque que tout se passe comme pour le pendule simple avec une énergie potentielle de la forme $E_p = mg\ell\,(1 - \cos\theta)$. Dans ce cas, on peut tracer le graphe de l'énergie potentielle et en déduire le portrait de phase, ce qui est réalisé figure 1.

Le mouvement du pendule peut-être de deux sortes :

— de type pendulaire lorsque l'énergie totale est trop faible pour dépasser le saut de potentiel.

— de type révolutif (ou fronde) lorsque l'énergie cinétique n'est jamais nulle.

Le passage d'un mouvement à un autre s'appelle une **bifurcation**. On remarque que la vitesse est nulle en $\theta = \pi$ (position d'équilibre instable).

Non-isochronisme des oscillations

La période des oscillations du pendule dépend de l'amplitude initiale du mouvement. On dit que les **oscillations ne sont pas isochrones**

6 Théorèmes énergétiques

6.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, soit un solide en rotation autour de l'axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. On note J_Δ le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ. L'énergie cinétique de rotation du solide vaut :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}$$

6.2 Théorème de l'énergie cinétique

Définition

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, soit un solide en rotation autour de l'axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ soumis à un moment M_Δ. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,ext} M_{i,\Delta}\dot{\theta} = \sum_{i,ext} M_{i,\Delta}\omega = \sum_{i,ext} P_i$$

La quantité $M_\Delta\dot{\theta}$ est homogène à une puissance, il s'agit de la puissance des actions mécaniques.

Application 9: Théorèmes énergétiques

1. En utilisant l'expression de l'énergie cinétique, redémontrer le théorème de l'énergie cinétique.
2. Retrouver l'équation du mouvement du pendule pesant à l'aide d'un théorème énergétique.

7 Vers les systèmes déformables : l'exemple du tabouret d'inertie

Une personne est assises sur un tabouret pouvant tourner sans frottements autour d'un axe vertical Δ. Il maintient ses bras tendus dans l'axe des épaules et tient des haltères. Un autre personne le met en rotation à la vitesse ω_1. Ensuite la personne replie ses bras et sa rotation se fait à la vitesse ω_2.

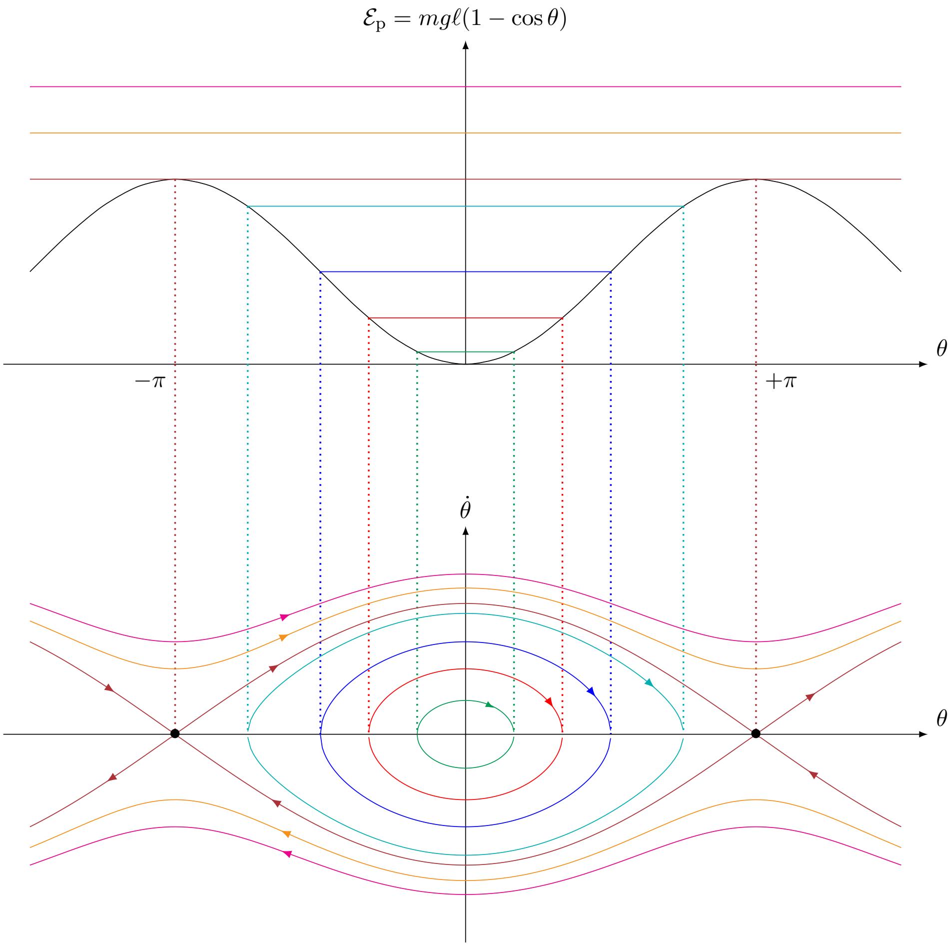


FIGURE 1 – Portrait de phase du pendule pesant

On s'intéresse au système {personne + haltères + tabouret}. Comme le tabouret est en rotation sans frottements, le moment de la liaison pivot est nul. Le moment du poids par rapport à Δ est également nul car l'axe est parallèle à sa droite d'action. Ainsi d'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \rightarrow \quad L_\Delta = \text{cte}$$

Le moment cinétique se conserve et on a donc :

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1$$

Or $J_1 > J_2$ car les masses dans la positions initiales sont réparties plus loin que l'axe de rotation donc $\boxed{\omega_2 > \omega_1}$.
L'énergie cinétique du système dans le référentiel de laboratoire n'est pas conservé :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 \neq 0$$

Cette variation est liée à la déformation du système sous l'effet de forces intérieures.

Définition

Dans un référentiel galiléen, pour un système d'énergie cinétique E_c soumis à des forces extérieures de puissance $P(\vec{f}_{\text{ext}})$ et à des forces intérieures de puissance $P(\vec{f}_{\text{int}})$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum P(\vec{f}_{\text{ext}}) + P(\vec{f}_{\text{int}})$$

ou sous forme intégrale :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{f}_{\text{ext}}) + (\vec{f}_{\text{int}})$$

Dans notre cas on a donc $(W(\vec{f}_{\text{ext}}) = 0)$:

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= W(\vec{f}_{\text{int}}) \\ \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 &= W(\vec{f}_{\text{int}}) \\ \frac{1}{2}J_1\omega_1(\omega_2 - \omega_2) &= W(\vec{f}_{\text{int}}) \end{aligned}$$