Fiche méthode

Outils — Mesures et incertitudes

C'est à vous

Un notebook est accessible afin de suivre ce document à l'adresse suivante :
`https://notebook.basthon.fr/?from=https://raw.githubusercontent.com/a-fafin/TP-physique/main/Introduction%20aux%20incertitudes.ipynb`

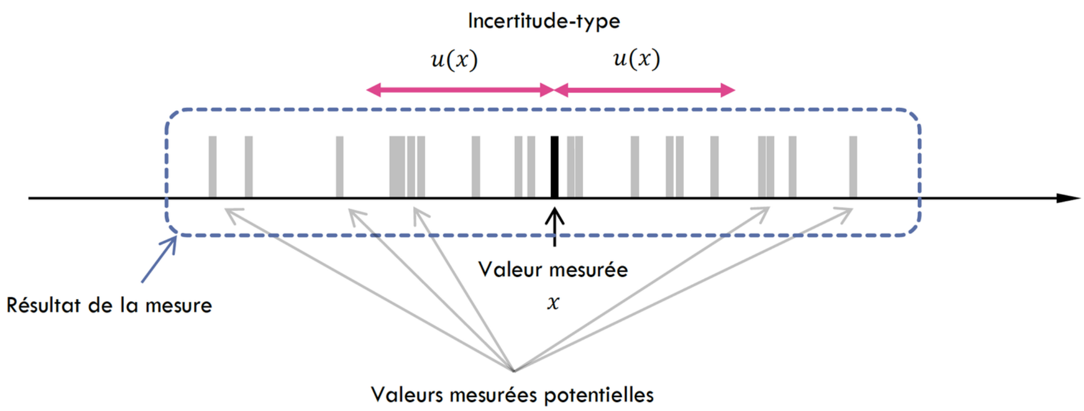
1 Mesures et incertitudes

La mesure de grandeurs physiques (température, longueur, tension, masse, etc.) est une étape essentielle de presque tous les domaines qui touchent à la physique ou à la chimie. Connaître la valeur de la grandeur en question est alors tout aussi important que de pouvoir quantifier la précision avec laquelle on la connaît.
Lors de la mesure d'une grandeur physique, la répétition d'une même mesure conduit à un ensemble de valeur mesurée x qui ne sont pas toutes identiques. Cette **variabilité** est naturelle et fait partie intrinsèquement de la mesure. Les causes de cette **variabilité** de la mesure sont multiples : variations des conditions expérimentales, instruments de mesure, processus physique et surtout l'expérimentateur. En effet la personne réalisant l'expérience est souvent la principale cause de variabilité de la mesure. Ainsi, il est naturel que 2 personnes qui réalisent la même expérience avec le même matériel ne trouvent pas exactement le même résultat.

1.1 Incertitude type

Définition

La quantification de la **variabilité** d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude type** et est notée $u(x)$.
Par définition, l'**incertitude-type** correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.



Le résultat d'une expérience est généralement noté $\boxed{x \pm u(x)}$

Si l'on effectue un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N, l'incertitude-type de la série est l'écart-type de la série $u(x)$:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Pour calculer l'écart-type, on peut utiliser la formule ci-dessus, mais le plus simple est d'utiliser la calculatrice ou une fonction python sur ordinateur. Avec un programme python, pour calculer l'écart-type d'un tableau `x`, on utilise la commande suivante :

```
u_x = np.std(x, ddof=1)
```

La commande `ddof=1` permet de calculer l'écart-type avec $\frac{1}{N-1}$ au lieu de $\frac{1}{N}$, ce qui est recommandé dans le cas de l'incertitude-type.

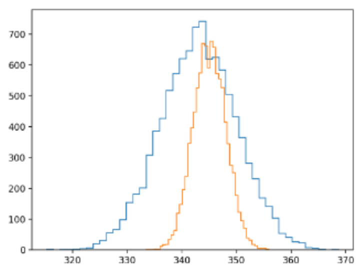
1.2 Écart normalisé

Définition

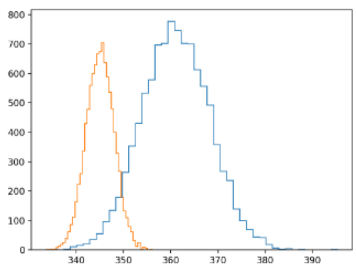
L'écart normalisé E_N ou z-score entre deux processus de mesure donnant les valeurs x_1 et x_2 d'incertitudes types $u(x_1)$ et $u(x_2)$ est défini par :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

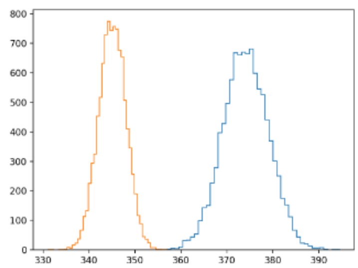
Par convention, deux résultats seront qualifiés de compatibles si $\boxed{E_N \leq 2}$.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$.



(b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$.



(c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

Si on compare une mesure x_1 à une valeur de référence (donnée sans incertitude), la formule devient :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_{\text{ref}}|}{u(x_1)}$$

2 Estimer l'incertitude type d'une mesure

2.1 Expérience avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter plusieurs fois le processus de mesure pour estimer l'incertitude-type associée.

Définition

Pour N mesures réalisées, on relève l'ensemble des points expérimentaux x_i. On note l'incertitude type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.
Le résultat de l'expérience est $\bar{x} \pm u(\bar{x})$ avec :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_1$$

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$$

L'incertitude-type associée à la moyenne $u(\bar{x})$ est plus petite que celle associée à une seule mesure $u(x)$, ce qui permet de comprendre le terme $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

2.2 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Il y a des cas où il n'y pas de variabilité observable, c'est-à-dire que la reproduction de la mesure donnera toujours le même résultat. Par exemple, cela peut être la cas si vous mesurez la tension aux bornes d'un dipôle, une distance avec une règle... Avec l'appareil de mesure choisi la variabilité est plus faible que la précision de la mesure. Dans ce cas il faut estimer la variabilité sans l'observer.

Définition

Lors d'une mesure sans variabilité observable, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\bar{x}$ cette valeur est Δ sa demi-largeur. Cela veut dire que l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x}-\Delta, \bar{x}+\Delta]$.

Le résultat de la mesure est alors $\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})}$ avec $\boxed{u(\bar{x}) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}}$

C'est à vous

Mesurer la largeur d'une feuille de papier à l'aide d'une règle graduée et estimer l'incertitude associée.

3 Incertitudes-types composées

Il arrive très souvent que les résultats de plusieurs mesures $x_1, x_2, ...$ soient utilisés pour calculer une nouvelle grandeur q. L'incertitude sur q, $u(q)$ dépend alors de l'incertitude sur les n autres grandeurs x_i ; on dit qu'il y a propagation des incertitudes.

a) Cas général $q = f(x_1, x_2, ...)$

Si les erreurs sur les x_i mesures sont indépendant, on a :

$$u(q) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2}$$

b) Cas particulier d'une somme ou différence

Si la grandeur calculée q une somme (ou une différence), $q = ax_1 + bx_2$ alors :

$$u(q) = \sqrt{(au(x_1))^2 + (bu(x_2))^2}$$

c) Cas particulier d'une multiplication ou division

Si la grandeur calculée est une produit (ou un quotient), $q = x_1 \times x_2$ (ou $q = x_2/x_1$), alors :

$$\frac{u(q)}{q} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Si la grandeur calculée est une produit avec des coefficients tel que, $q = x_1^a \times x_2^b$, alors :

$$\frac{u(q)}{q} = \sqrt{\left(a\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(b\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

4 Écriture du résultat final avec l'incertitude associée

— On écrit l'incertitude-type avec 2 chiffres significatifs.
Par exemple $u(x) = 2,825$ sera arrondi à $u(x) = 2,8$

— On écrit l'incertitude-type avec la même puissance de 10 et la même unité que pour la valeur de x.
Par exemple si $x = 4{,}2 \times 10^2$ s et $u(x) = 30$ s alors on écrira $x = 4{,}2 \times 10^2$ s et $u(x) = 0{,}30 \times 10^2$ s.

— Enfin, on écrit la valeur de x avec le même nombre de décimale que $u(x)$.
Dans l'exemple précédent, $u(x)$ a 2 décimale donc on écrit x avec 2 décimales :

$$\boxed{x = 4{,}20 \times 10^2\,\text{s} \quad \text{et} \quad u(x) = 0{,}30 \times 10^2\,\text{s}}$$

On écrit l'incertitude-type avec la même puissance de 10 et la même unité que pour la valeur de x.
Enfin, on écrit la valeur de x avec le même nombre de décimale que $u(x)$.

C'est à vous

Compléter le tableau suivant

Grandeur	Valeur mesurée	Incertitude-type	Ecriture
Distance	$742\,310{,}1$ m	$777{,}32$ m	$L =$
Distance	$8231{,}34$ m	$3{,}449$ µm	$L =$
Temps	$0{,}014\,280$ s	$0{,}000\,312$ s	$T =$
Temps	$0{,}002\,853\,4$ s	$0{,}000\,451$ s	$T =$