DM 6 : Électricité

Corrigé

Niveau 1 : Exercices 1 et 2
Niveau 2 : Exercices 1 et 3

Exercice 1 - Étude de circuits

1. On associe les deux résistances en parallèle, pour obtenir une résistance équivalente de valeur :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

On applique la loi d'ohm à cette résistance équivalente (soumise à la tension E) :

$$E = R_{\text{eq}} i \quad \text{soit} \quad \boxed{i = \frac{E}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} E}$$

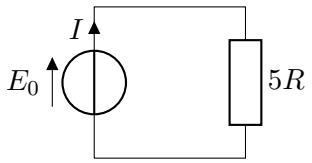
2. **Détermination de I** Pour déterminer I, on utilise la même méthode que précédemment : simplifier le montage en 1 seule résistance équivalente, et appliquer la loi d'ohm :

$$E = R_{\text{eq}} i \quad \text{avec} \quad R_{\text{eq}} = \frac{(R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{donc} \quad \boxed{i = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)} E}$$

Détermination de U On reconnaît un montage pont diviseur de tension. Les résistances R_2 et R_3 sont soumises à la tension E (loi des mailles). Ainsi :

$$\boxed{U = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E}$$

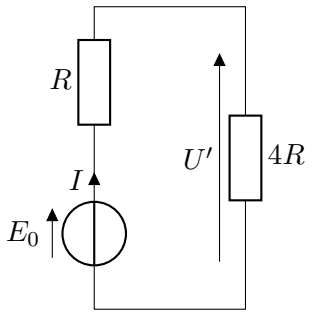
3. **Détermination de I**
On se ramène à un schéma avec 1 seule résistance et le générateur. Successivement : Les résistances $4R$ et $12R$ en parallèle donne une résistance de $3R$. Cette résistance est en série avec $2R \to 5R$. Cette nouvelle résistance est en parallèle avec $20R \to 4R$. Enfin $4R$ et en série avec R :



Ainsi par application de la loi d'ohm :

$$\boxed{I = \frac{E_0}{5R}}$$

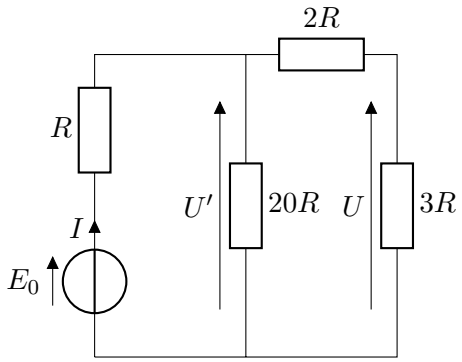
Détermination de U
Il faut appliquer 2 fois le pont diviseur de tension. Une première fois pour avoir U' :



Ainsi :

$$U' = \frac{4R}{5R}E_0 = \frac{4}{5}E_0$$

Ensuite :



Ainsi :

$$U = \frac{3R}{5R}U' = \frac{3}{5}\frac{4}{5}E_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{U = \frac{12}{25}E_0}$$

Détermination de I_1 et I_2 Par application de la loi d'ohm (circuit initial) :

$$\boxed{I_1 = \frac{U}{4R} = \frac{3}{25}E_0} \quad \text{et} \quad \boxed{I_2 = \frac{E}{25R}}$$

Exercice 2 - Réponse d'une bobine

1. La bobine se comporte comme un fil en régime permanent. Ainsi $u_s(t \to \infty) = 0$ et $i(t \to \infty) = E/R$.
2. a) τ s'exprime en s.

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]}$$

D'après la loi de comportement de la bobine :

$$[u] = [L]\frac{[i]}{[t]} = [L]\frac{A}{T}$$

Et d'après la loi d'ohm :

$$[u] = [R][i] = [R]A$$

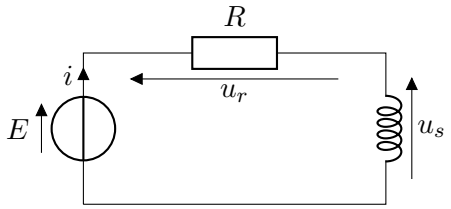
Donc

$$[L]\frac{A}{T} = [R]A \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{[L]}{[R]} = [\tau] = T}$$

τ est bien homogène à un temps.

b) τ est la constante de temps du circuit.

3. On réécrit le schéma en faisant apparaître toutes les tensions.



D'après la loi des mailles :

$$E = u_s + u_r$$

D'après la loi d'ohm : $u_r = Ri$ et d'après la loi de comportement de la bobine $u_s = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ donc :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On réécrit cette équation sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}}$$

4. Solution de l'équation homogène :

$$i_1 = Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = L/R$$

Solution particulière :

$$i_2 = \frac{E}{R}$$

Solution générale :

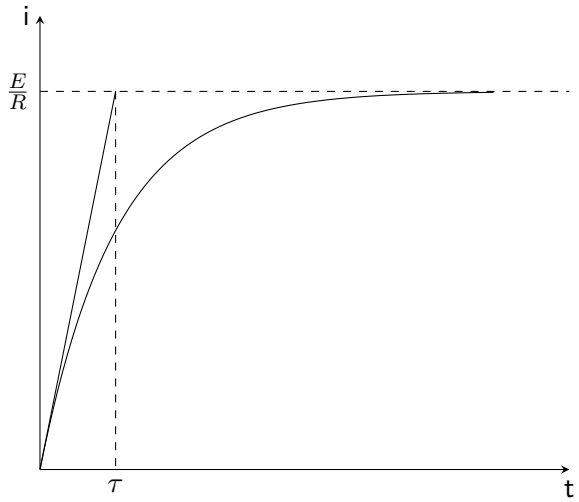
$$i(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

A $t = 0$, $i(0) = 0$ donc $A = -\frac{E}{R}$. Ainsi :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})}$$

Quand $t \to \infty$, $i(t \to \infty) = \frac{E}{R}$. On retrouve bien le comportement prévu dans la question 1.

5.



Le coefficient directeur de la tangente à l'origine :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t = 0) = \frac{E}{R}e^{-0/\tau} = \frac{E}{\tau}$$

La tangente à l'origine a donc pour équation :

$$y = \frac{E}{\tau}t$$

Elle coupe donc l'asymptote finale $\frac{E}{R}$ à l'abscisse $t = \tau$.

6. D'après l'énoncé $i(t_1) = 0,99\frac{E}{R}$ soit :

$$\frac{E}{R}(1 - e^{-t_1/\tau}) = 0,99\frac{E}{R} \quad \rightarrow \quad e^{-t_1/\tau} = 0,01$$

Donc :

$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln 0,01 \quad \rightarrow \boxed{t_1 \approx 5\tau}$$

7. D'après la loi de comportement de la bobine :

$$u_s(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{E}{R}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} = Ee^{-t/\tau}$$

8. L'énergie emmagasinée par la bobine est :

$$\boxed{E_L = \frac{1}{2}Li^2}$$

9. L'énergie est maximum quand i est maximum. On a montré qu'en régime permanent $i = \frac{E}{R}$ donc :

$$\boxed{E_L = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2}$$