DM 10 : Oscillateurs

Corrigé

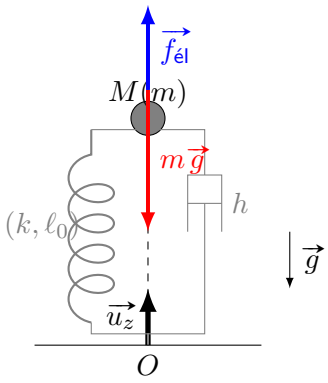
Exercice 1 - Zébulon prend de l'age

1. On a la force de frottement $\vec{F} = -h\vec{v}$ donc :

$$[h] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

L'unité de h est donc le kg $\cdot$ s^{-1}.

2. Système : Masse $M(m)$ qui modélise Zébulon
Référentiel : Terrestre supposé galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :



   — poids : $m\vec{g} = \boxed{-}mg\vec{u_z}$, ici $\vec{u_z}$ est vers le haut, alors que le poids est vers le bas !
   — Force de rappel élastique :
   $\vec{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_z}$, avec $\ell(t) = z(t)$:
   $\vec{f_{\text{él}}} = -k(z(t) - \ell_0)\vec{u_z}$
   — Force de frottement fluide : $\vec{F} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u_z}$

À l'équilibre : $\boxed{m\vec{g} + \vec{F} + \vec{f_{\text{él}}} = \vec{0}}$
Or $\vec{v} = \vec{0}$, donc $m\vec{g} + \vec{f_{\text{él}}} = \vec{0}$
Soit $-mg\vec{u_z} - k(z_e - \ell_0)\vec{u_z} = \vec{0}$
En projection selon $\vec{u_z}$: $-mg = k(z_e - \ell_0)$
Position d'équilibre : $\boxed{z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}} < \ell_0$, car la masse m appuie sur le ressort (par rapport à sa position au repos, horizontal).

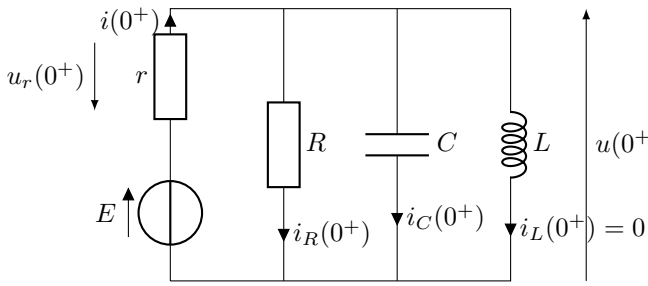
3. Principe fondamental de la dynamique à Zébulon dans le référentiel terrestre :
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{f} \Leftrightarrow m\ddot{z}\vec{u_z} = -mg\vec{u_z} - k(z - \ell_0)\vec{u_z} - h\dot{z}\vec{u_z}$
En projection selon $\vec{u_z}$: $\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\ell_0 - g$
On reconnaît la position d'équilibre dans le 2e membre : $\frac{k}{m}\ell_0 + g = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)$
Ainsi $\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$, soit $\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}(z - z_e) = 0$
En introduisant $Z(t) = z(t) - z_e$, en notant que $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par Z : $\boxed{\ddot{Z} + \frac{h}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z(t) = 0}$
Qu'on identifie avec la forme canonique $\boxed{\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z(t) = 0}$,
en posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ la pulsation propre et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$, où Q est le facteur de qualité $\boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}}$

4. Le régime est pseudo-périodique, donc la durée est de l'ordre de quelques $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.
A partir des expression précédentes, on en déduit que $\boxed{\tau = \frac{2m}{h}}$.

5. On constate que la durée du régime transitoire n'évolue pas au cours du vieillissement de Zébulon. Or cette durée, pour un régime pseudo-périodique, est donnée par $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. À partir des expressions précédentes, on en déduit que $\boxed{\tau = \frac{2m}{h}}$.

k n'intervient pas dans τ, tandis que m et h interviennent. On peut donc en déduire que m et h n'évoluent pas (ou évoluent proportionnellement, mais en réalité, est-ce que h peut évoluer ? ?), et que c'est donc k qui est affecté par le vieillissement.
On constate que quand Zébulon vieillit, le nombre d'oscillations au cours du régime transitoire diminue. Ce nombre est directement lié au facteur de qualité, $Q = \dfrac{\sqrt{mk}}{h}$, qui diminue quand le nombre d'oscillations diminue. On en déduit que k diminue quand Zébulon vieillit.
On pourrait également raisonner sur la pseudo-période des oscillations.

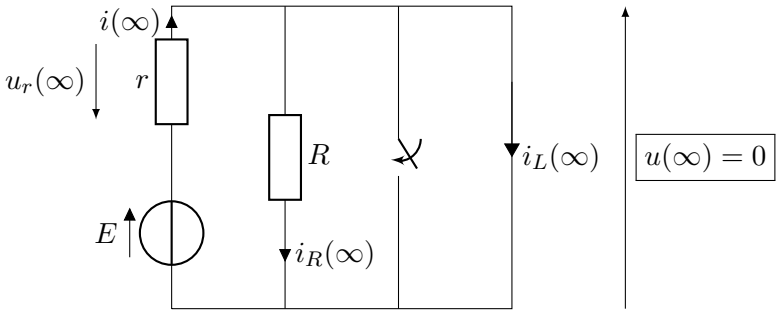
Exercice 2 - Circuit RLC parallèle



1.
   — Le condensateur était initialement déchargé, donc $u(t < 0) = 0$. De plus, **la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps**, donc $u(0^+) = u(0^-)$, ainsi $\boxed{u(0^+) = 0}$
   — Le circuit n'était traversé par aucun courant pour $t < 0$, donc $i(t < 0) = i_L(t < 0) = i_C(t < 0) = i_R(t < 0) = 0$. De plus, l'**intensité du courant à travers une bobine est une fonction continue du temps**, donc $i_L(0^+) = i_L(0^-)$, donc $\boxed{i_L(0^+) = 0}$

Afin de déterminer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i_C(0^+)}{C}$, il nous faut donc déterminer $i_C(0^+)$.
La loi des nœuds à $t = 0^+$: $i(0^+) = i_C(0^+) + i_L(0^+) + i_R(0^+)$, or $i_R(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R} = 0$ et $i_L(0^+) = 0$.
Ainsi $i(0^+) = i_C(0^+)$.
La loi des mailles nous donne que $u(0^+) + ri(0^+) = E$, donc $i(0^+) = i_C(0^+) = \dfrac{E}{r}$.
On en déduit (enfin !) que $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{rC}}$
ATTENTION, à ne pas conclure trop rapidement sur les conditions initiales. Seule l'intensité à travers la bobine est continue, pour les autres on ne peut rien dire a priori.

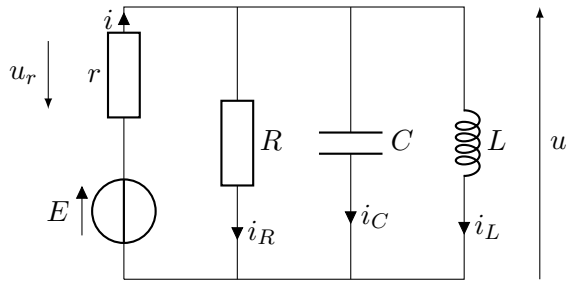
2.
En régime permanent, aucune grandeur électrique ne dépend du temps, donc toutes les dérivées temporelles sont nulles. La tension aux bornes la bobine vaut $u(\infty) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, donc la bobine se comporte comme un fil en RP. L'intensité du courant à travers du condensateur $i_C(\infty) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$, donc le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en RP.
Ainsi, on peut représenter le circuit étudié.
Ainsi $\boxed{u(\infty) = 0}$



La loi d'Ohm nous permet également d'en déduire que $i_R(\infty) = \dfrac{u(\infty)}{R} = 0$.
La loi des mailles nous donne enfin $u(\infty) + ri(\infty) = E$, et donc $i(\infty) = \dfrac{E}{r}$.
ATTENTION, la bobine est équivalente à un fil, vous ne pouvez pas supprimer la branche (le fil), le fil court-circuite R et C.

3.

Nous avons 6 inconnues, donc il faut 6 équations indépendantes :



— (1) Loi des mailles : $u + u_r - E = 0$
— (2) Loi des nœuds : $i = i_C + i_L + i_R$
— (3) Pour C : $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
— (4) Pour L : $u = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$
— (5) Pour R : $u = Ri_R$
— (6) Pour r : $u_r = ri$

Il faut combiner ces 6 équations afin d'obtenir une équation différentielle vérifiée par u, il faut donc tout exprimer en fonction de u.
On injecte (6) dans (1) : $u + ri = E$ (1'). Puis (2) dans (1') : $u + r(i_C + i_L + i_R) = E$ (1")
On injecte (3) et (5) dans (1") : $u + r\left(C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i_L + \dfrac{u}{R}\right) = E$ (*)
Pour exprimer i_L en fonction de u, il faut donc dériver par rapport au temps :
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + r\left(C\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = 0$, ainsi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\left(1 + \dfrac{r}{R}\right) + rC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + r\dfrac{u}{L} = 0$, et donc
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R}\right)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0}$, que l'on identifie à l'équation différentielle canonique :
$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$, avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R}\right) \Leftrightarrow Q = \omega_0 C\dfrac{rR}{r+R}$, d'où $\boxed{Q = \dfrac{rR}{r+R}\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

4. On observe des pseudo-oscillations, il s'agit donc d'un $\boxed{\text{régime pseudo-périodique}}$. On peut en déduire que $\boxed{Q > \dfrac{1}{2}}$.
5. L'équation différentielle se résout en 4 étapes, à suivre scrupuleusement :
   1. **Résolution de l'équation différentielle homogène :**
      Étape 1 Équation caractéristique : $X^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$
      Étape 2 Discriminant : $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right) = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{(2Q)^2} - 1\right)$
      D'après la courbe de $u(t)$ fournie, on est dans le cas d'un régime pseudo-périodique, donc $\Delta < 0$.
      Étape 3 Racines de l'équation caractéristique réelles : $X = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 j\sqrt{1 - \dfrac{1}{(2Q)^2}} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j\omega$
      Étape 4 Solution de l'équation homogène : $u_H(t) = e^{-t/\tau}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$
   2. Il n'y a pas de solution particulière à rechercher ici car l'équation a un second membre nul.
   3. Ainsi $\boxed{u(t) = e^{-t/\tau}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))}$
   4. **Recherche des deux constantes d'intégration à l'aide des deux conditions initiales** :
      $u(0) = A = 0$, donc $A = 0$
      $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^{-t/\tau}\left(-\dfrac{1}{\tau} \times B\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right)$
      Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \dfrac{E}{rC} = B\omega$, soit $B = \dfrac{E}{rC\omega}$

   Ainsi $\boxed{u(t) = \dfrac{E}{rC\omega}e^{-t/\tau}\sin(\omega t)}$
   On vérifie l'homogénéité en se souvenant que rC est homogène à un temps, donc $rC\omega$ est sans dimension.
6. $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0}$ on retrouve le résultat trouvé précédemment.

7.

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)}{u(t+nT)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega t)}{e^{-\frac{t+nT}{\tau}}\sin(\omega(t+nT))}\right)\\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{e^{\frac{nT}{\tau}}\sin(\omega t)}{\sin(\omega t+n\omega T))}\right)\\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{e^{\frac{nT}{\tau}}\sin(\omega t)}{\sin(\omega t+n2\pi))}\right)\\
&= \frac{1}{n}\times\frac{nT}{\tau}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\delta = \frac{T}{\tau}}$

8. Avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

On peut en déduire : $\boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$, soit $\boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2}+\frac{1}{4}}}$

Graphiquement, on lit : $\delta = \frac{1}{3}\ln\frac{0,3}{0,04} = 0,672$ (pour les AN suivantes, bien utiliser la valeur fournie par la calculatrice avec tous les chiffres, pour éviter les arrondis.)

Soit $Q = 4,7$

Enfin, on en déduit L avec : $\boxed{L = \left(\frac{rR}{r+R}\right)^2 \times \frac{C}{Q^2} = 0{,}10\,\text{mH}}$