

# DS 4 - Physique-chimie

Vendredi 3 février - 4h

**Les calculatrices sont autorisées**

**Le sujet est composé de 5 parties indépendantes**

## 1 Pendule simple

On considère un point  $M$  de masse  $m$  suspendu par un fil de longueur  $\ell$  accroché à un point  $O$ . L'ensemble forme ce que l'on appelle un pendule simple.

Le pendule est repéré par l'angle  $\theta$  et on notera  $Oz$  l'axe vertical orienté vers le **bas**. On lâche le point  $M$  d'un angle  $\theta_0$  et sans vitesse initiale. Les frottements sont négligés.

**Q1.** Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du point  $M$  en un position quelconque en fonction de  $m$ ,  $\ell$ ,  $\theta$  et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

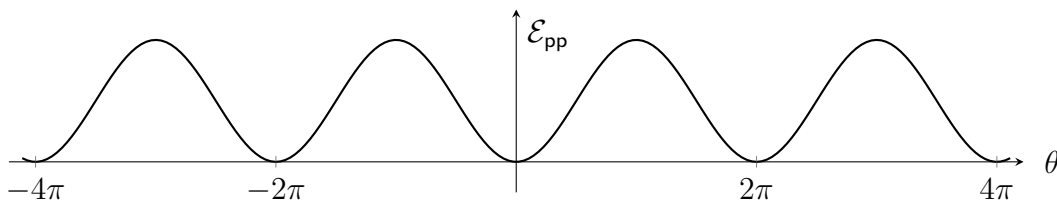
**Q2.** Le système est-il conservatif? Justifier.

**Q3.** Établir l'expression de la norme de la vitesse en fonction de  $\theta$ .

**Q4.** Quelle est la valeur numérique de la vitesse au niveau le plus bas pour un angle  $\theta_0 = 30^\circ$  et un fil  $\ell = 30$  cm.

**Q5.** Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ . Cette équation est-elle linéaire? Justifier.

On trace, ci-dessous, l'évolution de l'énergie potentielle de pesanteur  $\mathcal{E}_{pp}$  en fonction de l'angle  $\theta$ .



**Q6.** Identifier graphiquement les positions d'équilibres possibles pour le pendule. Sont-elles stables ou instables?

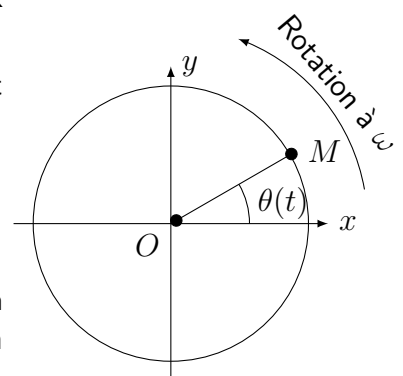
## 2 Chaussette dans un sèche-linge

Dans un sèche-linge, le mouvement d'une chaussette s'effectue en deux phases alternées :

- dans la phase 1, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme;
- dans la phase 2, elle retombe en chute libre.

On observe qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit. On cherche à déterminer ce lieu.

On modélise le tambour par un cylindre de rayon  $R = 25$  cm tournant à  $50 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$ . On s'intéresse au mouvement de la chaussette que l'on assimile à un point matériel  $M$  de masse  $m$ .



On étudie la première phase pendant laquelle le linge est entraîné dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse que le tambour et en restant collé aux parois du tambour. Pour les applications numériques, on considère  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Q7.** Quel système de coordonnées est adapté à l'étude du problème ?

**Q8.** Exprimer la position  $\overrightarrow{OM}$ , la vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{a}$  de la chaussette dans ce système de coordonnées.

**Q9.** Faire un bilan des forces.

**Q10.** En déduire l'expression de la réaction du tambour sur la chaussette en fonction de  $m$ ,  $R$ ,  $g$ ,  $\omega$  et  $\theta$ .

**Q11.** Montrer que la réaction normale s'annule lorsque la chaussette atteint un point donné dont on déterminera la position angulaire.

**Q12.** Que se-passe-t-il en ce point ? Quel est le mouvement ultérieur ?

## 3 Champagne

### 3.1 Éjection du bouchon de liège

**Q13.** Lors de l'ouverture d'une bouteille de champagne, le bouchon peut s'avérer être un projectile dangereux en raison de la forte pression qui règne à l'intérieur de la bouteille (à température ambiante de  $20^\circ\text{C}$ , elle avoisine 6 bars). Estimer jusqu'à quelle hauteur il est possible d'amener un bouchon de liège dans l'air lorsqu'il est éjecté du goulot d'une bouteille pleine. On précise que  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ .

*Pour répondre à cette question, il appartient au candidat de modéliser la situation. Il est notamment attendu de sa part :*

- qu'il schématise la situation expérimentale ;
- qu'il introduise les grandeurs physiques pertinentes et qu'il associe à chacune d'elles une notation ;
- qu'il précise les lois physiques qu'il est amené à utiliser ainsi que les hypothèses et approximations qu'il est amené à formuler ;
- que ses calculs soient menés littéralement mais qu'ils aient pour but final d'obtenir une valeur numérique typique pour des conditions expérimentales réalistes ;
- qu'il critique les résultats obtenus et propose des améliorations à la modélisation qu'il aura conduite.



### 3.2 Montée des bulles

#### a) Approche théorique

On cherche à étudier la trajectoire des bulles une fois en liberté au sein du liquide de masse volumique  $\rho_{\text{liq}} \simeq 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace  $(O, \vec{e}_z)$  vertical orienté vers le haut, où  $\vec{e}_z$  est un vecteur unitaire. Lors de la montée, la bulle de rayon  $r = 1,0 \text{ mm}$  et de masse constante est soumise, outre son poids, à :

- la poussée d'Archimède, notée  $\vec{\Pi}$ , égale à l'opposé du poids d'un volume d'eau équivalent au volume de la bulle :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{liq}} V \vec{g}$$

- une force de frottement fluide, appelée force de Stokes, traduisant la résistance de l'eau :

$$\vec{f} = 6\pi\eta r \vec{v}$$

où  $\eta$  est la viscosité du champagne et vaut  $\eta = 1,3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  à la température  $T = 298 \text{ K}$  et  $v$  la vitesse de la bulle.

**Q14.** Montrer que le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède. On supposera que la pression de  $\text{CO}_2$  dans la bulle vaut  $P_{\text{CO}_2} = 1,00 \text{ bar}$ .

**Q15.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante  $v_z$  de la vitesse de la bulle sur l'axe  $z$ . On la mettra sous la forme :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \quad (1)$$

où  $\tau$  et  $v_{\text{lim}}$  sont des constantes dont on donnera l'expression en fonction de  $\rho_{\text{liq}}$  la masse volumique du liquide,  $\rho_{\text{CO}_2}$  celle du  $\text{CO}_2$  gazeux,  $\eta$ ,  $r$  et  $g$ .

**Q16.** Quelle est la dimension de  $\tau$ ? Justifier.

**Q17.** Résoudre cette équation différentielle et représenter l'allure  $v_z$  au cours du temps. Indiquer  $v_{\text{lim}}$  et  $\tau$  sur la courbe et donner leur interprétation physique.

**Q18.** Calculer la valeur numérique de  $\tau$ . Quelle approximation peut-on effectuer sur l'expression de  $v_z$  ?

### 3.3 Confrontation expérimentale

L'émission des bulles se fait la plupart du temps de manière périodique, ce qui rend l'étude plus aisée. La méthode expérimentale utilisée par Gérard Liger-Belair et son équipe du laboratoire d'œnologie de Reims en 1999 est présentée ci-dessous.

Ils ont cherché à photographier un train de bulles dans une flûte de champagne à un instant donné en se servant d'un appareil photographique dont l'ouverture du diaphragme est synchronisée avec un flash. Un écran en plastique est interposé entre le verre et le flash afin d'homogénéiser la lumière. Les distances sont étalonnées à l'aide d'un papier millimétré collé à la surface du verre. Enfin, on utilise un stroboscope, appareil émettant à intervalles de temps régulier des éclairs de lumière à une fréquence  $f_b$  bien choisie. La figure 1 (b) constitue un exemple de cliché obtenu. À noter que les bulles n'ont pas un rayon constant.

**Q19.** Expliquer en quoi un choix judicieux de la fréquence  $f_b$  permet d'avoir accès, en un seul cliché, à une succession de positions occupées par une bulle ?

**Q20.** Le cliché précédent a été pris avec  $f_b = 20 \text{ Hz}$ . Justifier que la vitesse  $v_n$  d'une bulle indiquée  $n$  peut être évaluée par l'expression :

$$v_n = f_b \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2} \quad (2)$$

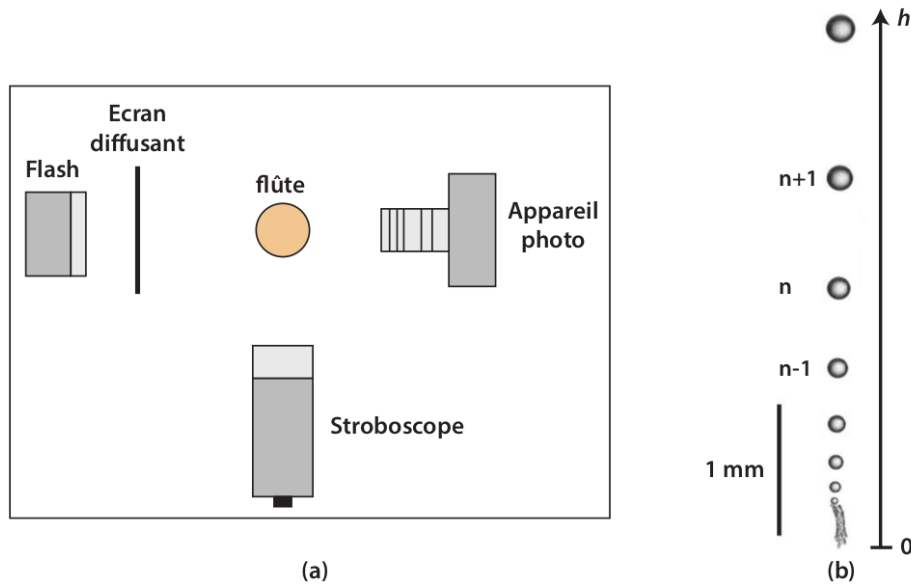


FIGURE 1 – Dispositif expérimental (a) et cliché obtenu par cette méthode (b)

où  $h_{n+1}$  et  $h_{n-1}$  représentent respectivement les altitudes des bulles indicées  $n + 1$  et  $n - 1$ . Effectuer l'application numérique pour la bulle indicée  $n$  sur la figure 1.

**Q21.** L'allure des positions des bulles sur la photographie est-elle en accord avec l'hypothèse formulée question 18? Expliquer

On peut également mesurer le rayon de chaque bulle, ce qui permet finalement de tracer la vitesse en fonction du rayon, comme représenté sur la figure 2.

**Q22.** Montrer analytiquement que  $\log v_{lim} = A + 2 \log r$  où  $A$  est une constante et  $\log$  la fonction logarithme décimal. Justifier que cette expression est cohérente avec la figure.

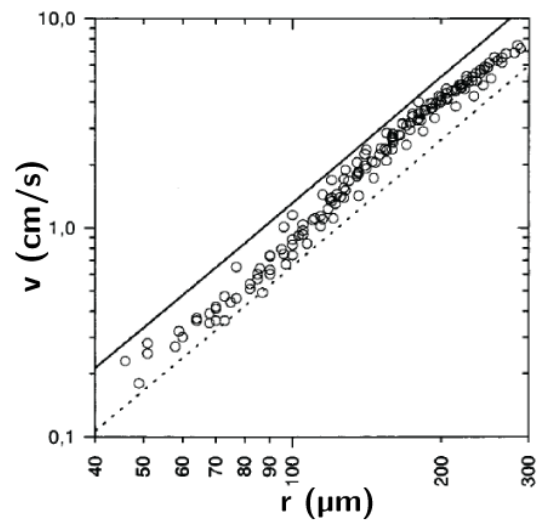


FIGURE 2 – Vitesse de remontée des bulles en fonction du rayon

## 4 Mouvement du palet sur la glace

On s'intéresse dans cet exercice à la pratique du hockey sur glace. L'objectif de chaque équipe est de marquer des buts en envoyant un disque de caoutchouc, appelé palet, à l'intérieur du but adverse situé à une extrémité de la patinoire.

Le palet est fabriqué en caoutchouc avec une masse moyenne de 160 grammes. Sur la glace, le palet peut atteindre des vitesses exceptionnelles du fait de la puissance des joueurs. En Russie, lors des épreuves

d'habileté de la Ligue continentale de hockey, le défenseur Aleksandr Riazantsev a établi un nouveau record du monde en janvier 2017 avec une frappe à  $183,67 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  soit environ  $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Au cours d'une séance d'entraînement à ces épreuves d'habileté, un joueur de hockey propulse le palet, à l'aide de sa crosse, sur un plan recouvert de glace et incliné d'un angle  $\alpha = 20^\circ$  par rapport à l'horizontale. La position du centre d'inertie du palet est repérée sur un axe  $(Ox)$  de même direction que la ligne de plus grande pente et orienté vers le haut. On note  $(Oy)$  l'axe perpendiculaire au plan incliné et orienté vers le haut. Les vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  sont des vecteurs unitaires dirigés respectivement selon les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Le centre d'inertie du palet est noté G (figure 3). À l'instant initial, le palet se trouve à l'origine du repère. L'intensité du champ de pesanteur terrestre  $g$  est estimée à  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

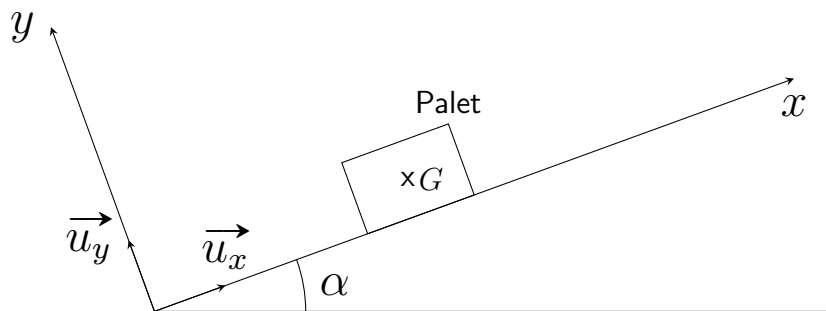


FIGURE 3 – Schéma du palet sur le plan incliné

#### Lois de Coulomb

On appelle action de contact l'action mécanique qu'exercent l'un sur l'autre deux solides dont les surfaces sont en contact.

Lorsque les deux solides en contact glissent l'un sur l'autre on a :

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$$

où  $f_d$  est le coefficient de frottement dynamique qui dépend de la nature et de l'état des surface en contact.

Valeurs usuelles :  $f_d(\text{bois sur bois}) = 0,40$ ,  $f_d(\text{caoutchouc sur glace}) = 0,050$ ,  
 $f_d(\text{acier sur glace}) = 0,020$

Dans une première phase (propulsion du palet par la crosse sur le plan incliné), on considère les frottements comme négligeables. La palette de la crosse est en contact avec le palet.

**Q23.** Choisir un référentiel afin d'étudier le mouvement du palet durant la propulsion et le préciser. Peut-il être considéré comme galiléen dans le cadre de cet entraînement ?

**Q24.** Établir un bilan des forces qui s'exercent sur le palet durant la propulsion et les représenter sur un schéma cohérent sans souci d'échelle.

**Q25.** Exprimer l'intensité de la force de propulsion  $F$  exercée par le joueur sur le palet en fonction de l'accélération  $a$  du palet, de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  du plan, de la masse  $m$  du palet et de l'intensité du champ de pesanteur  $g$ .

**Q26.** Sachant que la propulsion due au joueur de hockey dure 0,5 seconde et que le mouvement est uniformément accéléré, quelle doit être l'intensité de la force de propulsion pour que le joueur égale le record du monde de vitesse sur plan incliné ?

Dans une deuxième phase, le palet n'est plus en contact avec la crosse et est en mouvement de translation rectiligne vers le haut du plan incliné. On considère les frottements comme négligeables.

**Q27.** Sur un schéma, représenter les forces qui s'exercent sur le palet. Ces forces ont-elles un caractère moteur, résistant ou sont-elles sans effet lors du mouvement du palet vers le haut du plan incliné ?

**Q28.** Déterminer l'expression de  $x(t)$ , déplacement du palet selon l'axe  $(Ox)$ .

**Q29.** Montrer que la distance  $d$  parcourue par le palet avant de s'arrêter est donnée par la relation :

$$d = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$$

où  $v_0$  est la vitesse initiale selon l'axe  $(Ox)$  au début de la deuxième phase.

On cherche à établir la distance qui a été nécessaire pour que le palet s'arrête lors de l'établissement du record du monde sur une patinoire de surface horizontale. Il faut tenir compte des frottements.

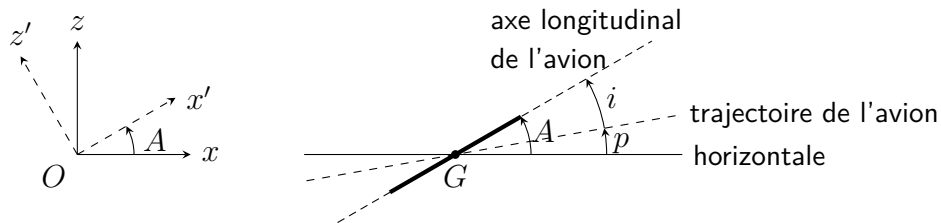
**Q30.** Les forces de frottement sont-elles conservatives ?

**Q31.** Calculer le travail de la composante tangentielle  $\vec{T}$  de l'action de la glace sur le palet lors du déplacement du palet.

**Q32.** On considère que la composante  $\vec{T}$  est un vecteur constant. Quelle distance faut-il au palet pour s'arrêter ?

## 5 Mécanique de vol d'un avion

On étudie différentes phases du vol d'un avion, en l'absence de vent, dans le référentiel terrestre  $(\mathcal{R})$  supposé galiléen auquel on associe un système d'axes cartésien dont  $(Oz)$  constitue la verticale ascendante.



La trajectoire et la configuration de vol de l'avion dans l'espace sont définis à l'aide de trois angles orientés représentés dans la figure ci-dessus :

- la pente  $p$ , angle de l'horizontale vers la trajectoire de l'avion ;
- l'assiette  $A$ , angle de l'horizontale vers l'axe longitudinal de l'avion ;
- l'incidence  $i$ , angle de la trajectoire de l'avion vers son axe longitudinal.

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre d'inertie  $G$  de l'avion, de masse  $m = 2,3 \times 10^3$  kg, soumis aux forces suivantes :

- son poids  $\vec{P}$  ;
- la force de traction  $\vec{F}_m$  de l'hélice, entraînée par le moteur, dont la direction est celle de l'axe longitudinal de l'avion ;
- la résultante des forces aérodynamiques, contenue dans le plan de symétrie de l'avion, décomposée en portance  $\vec{F}_p$  et traînée  $\vec{F}_t$  :
  - la portance, perpendiculaire à la trajectoire de l'avion, de norme  $F_p = \frac{1}{2} \rho S v^2 C_p$  ;

— la traînée, de même direction que la trajectoire mais s'opposant au mouvement de l'avion, de norme  $F_t = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_t$  ;  
 où  $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  est la masse volumique de l'air supposée constante et égale à celle mesurée au niveau de la mer,  $S = 220 \text{ m}^2$  est l'aire de la surface des ailes de l'avion projetée sur le plan horizontal et  $v$  est la vitesse de l'avion par rapport à l'air.

L'intensité du champ de pesanteur supposé uniforme est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Les coefficients sans dimension  $C_p$  et  $C_t$  ne dépendent que de l'incidence  $i$ . Pour une incidence nulle ( $i = 0^\circ$ ), ces coefficients vérifient :

$$C_p = 0,24 \quad \text{et} \quad C_t = 0,008$$

Lors de l'étude du mouvement de l'avion dans différentes configurations, on évalue les efforts mécaniques subis par la structure en déterminant le facteur de charge  $\eta$  défini comme le rapport de la norme de la portance sur la norme du poids.

Compte tenu de la résistance des matériaux, la conception mécanique de la structure impose une borne supérieure  $\eta_{\text{max}}$  au facteur de charge de l'ordre de 2.

## Vol en montée

Après avoir quitté le sol, l'avion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme en montée avec une pente  $p$  à incidence nulle  $i = 0$ . Le pilote impose au moteur de l'avion une puissance constante  $\mathcal{P}_m$ .

**Q33.** Faire un schéma de la configuration de vol en y représentant les forces appliquées à l'avion ( $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_m$ ,  $\vec{F}_p$  et  $\vec{F}_t$ ).

**Q34.** Justifier pourquoi on peut écrire la relation :

$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = \vec{0} \quad (3)$$

**Q35.** Projeter la relation 3 sur l'axe longitudinal de l'avion et sur l'axe qui lui est perpendiculaire (les axes  $Ox'$  et  $Oz'$ ) pour obtenir deux relations scalaires.

**Q36.** En déduire que la relation liant la vitesse  $v$  de l'avion à l'assiette  $A$  s'écrit :

$$v = \sqrt{\frac{2mg \cos A}{\rho S C_p}}$$

**Q37.** Exprimer la puissance du moteur (puissance fournie par la force  $\vec{F}_m$  à l'avion) en fonction de  $\|\vec{F}_m\|$  et  $v$ .

On admet que la relation entre l'assiette  $A$  et la puissance  $\mathcal{P}_m$  du moteur s'écrit :

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}(\cos A + f_0 \sin A)\sqrt{\cos A} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{C_p}{C_t} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{m0} = mg \frac{C_t}{C_p} \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}$$

**Q38.** Vérifier par analyse dimensionnelle la cohérence de l'expression de  $\mathcal{P}_{m0}$  puis calculer numériquement  $f_0$  et  $\mathcal{P}_{m0}$ .

Le pilote impose une puissance du moteur égale à sa valeur maximale  $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{\text{max}} = 50 \text{ kW}$ .

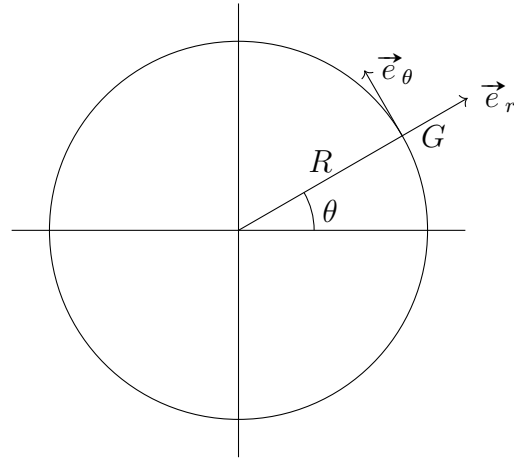
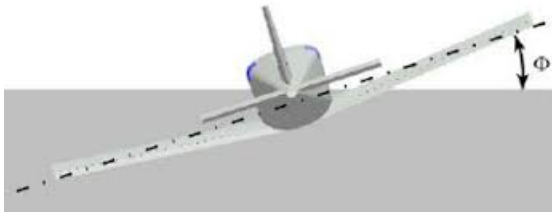
**Q39.** Déterminer une expression approchée de  $\mathcal{P}_m$  sachant que l'assiette ne dépasse généralement pas  $10^\circ$ . En déduire la valeur numérique de l'assiette  $A$ . (On rappelle que pour  $x \ll 1 \text{ rad}$ , on a  $\sin x \approx x$  et  $\cos(x) \approx 1$ )

**Q40.** Déterminer la relation liant la vitesse ascensionnelle  $v_z$  de l'avion à l'assiette  $A$ . Calculer sa valeur numérique.

**Q41.** Déterminer l'expression du facteur de charge  $\eta$  en montée en fonction de l'assiette  $A$ . Commenter le résultat.

## Vol en virage

L'avion effectue maintenant un virage circulaire en palier ( $p = 0^\circ$ ), avec une incidence nulle ( $i = 0^\circ$ ) et à vitesse  $v$  constante. Pour réaliser ce virage, le pilote incline l'avion d'un angle  $\phi$  (le plan moyen des ailes est incliné de  $\phi$  par rapport au plan horizontal).



Vue de dessus

**Q42.** L'avion étant incliné pour effectuer le virage, faire le schéma de la configuration de vol en vue arrière en y représentant les forces.

**Q43.** Exprimer dans le système de coordonnées polaires, dont l'origine est au centre de la trajectoire de l'avion, le vecteur accélération de l'avion. L'exprimer en fonction de la vitesse  $v$  et du rayon  $R$  du virage.

**Q44.** En déduire que les forces s'exerçant sur l'avion sont reliées par la relation :

$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

où  $\vec{e}_r$  est un vecteur unitaire dirigé du centre de la trajectoire vers l'avion.

**Q45.** Projeter la relation précédente sur les axes  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ . En déduire une expression du rayon  $R$  du virage en fonction de la vitesse  $v$  de l'avion, de l'angle d'inclinaison  $\phi$  et de  $g$ .

**Q46.** Déterminer l'expression du facteur de charge  $\eta$  en fonction de  $\phi$ .

**Q47.** Sachant que la conception structurale de l'avion impose une borne supérieure au facteur de charge  $\eta_{\max}$ , déterminer l'expression du rayon minimal du virage que le pilote peut faire prendre à l'avion en toute sécurité.