DS 4 - Physique-chimie

Vendredi 3 février - 4h

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de 5 parties indépendantes

1 Pendule simple

Q1. L'énergie potentielle est donnée par $\mathcal{E}_{\text{pp}} = -mgz + \text{cte}$. Par projection on obtient $z = \ell\cos\theta$, on en déduit donc :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{pp}} = -mg\ell\cos\theta + \text{cte}}$$

Q2. Le système est soumis à son poids qui est conservative et à la force de tension du fil qui ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement. Toutes les forces qui travaillent sont conservatives, le système est donc conservatif.

Q3. Le théorème de l'énergie mécanique entre l'instant initial en lequel le point M est en A et un instant quelconque pour lequel l'angle vaut θ et le point M est un B :

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{m}} = 0$$
$$\mathcal{E}_{\text{m}}(A) = \mathcal{E}_{\text{m}}(B)$$
$$\mathcal{E}_{\text{pp}}(A) = \mathcal{E}_{\text{pp}}(B) + \mathcal{E}_{\text{c}}(B)$$
$$-mg\ell\cos\theta_0 + \text{cte} = -mg\ell\cos\theta + \text{cte} + \frac{1}{2}mv(\theta)^2$$

Soit :

$$\boxed{v(\theta) = \sqrt{2g\ell(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

Q4. L'application numérique donne avec $\theta = 0$:

$$v(0) = 0{,}89\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Q5. Le théorème de la puissance mécanique appliqué en M donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = 0$$

avec $\mathcal{E}_{\text{m}} = \mathcal{E}_{\text{c}} + \mathcal{E}_{\text{pp}} = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta + \text{cte}$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}m\ell^2 2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

En simplifiant, on obtient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Cette équation n'est pas linéaire à cause de la fonction sinuls.

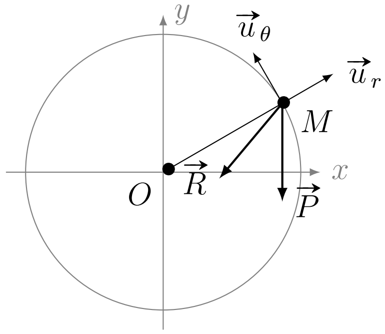
Q6. Les positions d'équilibre correspondent aux extréma de la courbe. On les observe dès que $\theta = k\pi$ avec k un entier naturel. Ces positions d'équilibre sont stables lorsque l'énergie potentielle atteint un minimum, c'est le cas lorsque $\theta = 2m\pi$ avec $m \in \mathcal{Z}$ et elles sont instables pour les maxima, c'est le cas lorsque $\theta = (2m+1)\pi$ où $m \in \mathcal{Z}$.

2 Chaussette dans un sèche-linge

Q7. On étudie le mouvement de la chaussette assimilé à un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre galiléen. Lors de la première phase, M est en mouvement circulaire uniforme de centre O et de rayon R à la vitesse angulaire ω. Il faut donc utiliser les **coordonnées polaires**.

Q8.

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r \quad \rightarrow \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta \quad \rightarrow \quad \vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r$$



En effet la vitesse de rotation étant uniforme on a $v = R\omega =$ cte, donc on en déduit que ω est une constante. Ainsi $\dot{\omega} = 0$.

Q9. Deux forces s'exercent sur la chaussette :

— Le poids $\vec{P} = -m\vec{g} = -mg\sin\theta\vec{u}_r - mg\cos\theta\vec{u}_\theta$.

— La réaction du support $\vec{R}$ qui possède deux composantes : une composante tangentielle $\vec{T}$ et une composante normale $\vec{N}$ ($\vec{R} = \vec{N}+\vec{T}$). La composante normale s'exprime par $\vec{N} = -N\vec{u}_r$ et la composante tangentielle par $\vec{T} = -T\vec{u}_\theta$.

Q10. D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \quad \text{donc} \quad -N\vec{u}_r - T\vec{u}_\theta = m\vec{a} - \vec{P} = -mR\omega^2\vec{u}_r + mg\sin\theta\vec{u}_r - mg\cos\theta\vec{u}_\theta$$

Ainsi, par projection sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, on arrive à :

$$\begin{cases} -N = -mR\omega^2 + mg\sin\theta \\ -T = mg\cos\theta \end{cases}$$

Q11. La réaction normale s'annule lorsque $N = 0$. Ainsi d'après la projection lorsque $mg\sin\theta = mR\omega^2$ soit pour $\theta = \theta_0$ tel que :

$$\sin\theta_0 = \frac{R}{g}\omega^2 = 0,70 \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta_0 = 44{,}4°}$$

Q12. L'annulation de la force de contact entre le tambour et la chaussette montre qu'il y a rupture de contact, la chaussette décolle donc de la paroi. Elle est projetée avec une vitesse $R\omega$ tangente au tambour depuis le point repéré par la coordonnée angulaire θ_0. Le mouvement ultérieur, sous la seule action du poids, est un vol parabolique.

3 Champagne

3.1 Éjection du bouchon de liège

Q13.

- ☐ *Analyse rapide :* du fait des forces de pression au niveau du bas du bouchon, ce dernier pourra se mettre en mouvement, ce qui va lui transmettre une certaine vitesse. On a ensuite une situation analogue à une chute libre où seule la gravité intervient, et qui limitera la hauteur maximale que pourra atteindre le bouchon : le poids est en effet durant la montée une force résistante.

- ☐ *Première étape : éjection du bouchon depuis la bouteille.* On suppose que l'on peut négliger les frottements au niveau du goulot lors du déplacement du bouchon (en première approximation) et que la pression évolue peu à l'intérieur de la bouteille (le volume n'augmente que très peu lors du déplacement du bouchon). On étudie le mouvement du bouchon lorsqu'il se déplace d'environ $\ell = 4\,\text{cm}$, hauteur de la base du bouchon enfoncée dans le goulot de rayon $R = 1\,\text{cm}$ (d'après la photographie fournie). On suppose que la masse du bouchon est d'environ $m = 10\,\text{g}$.
Pour déterminer la vitesse finale (sans utiliser le théorème de l'énergie cinétique), il convient d'appliquer la loi de la quantité de mouvement au bouchon. On choisit comme référentiel le laboratoire, supposé galiléen, auquel on lui adjoint un système d'axe tel que l'axe (Oz) soit vertical ascendant ayant pour origine la position initiale du bouchon. On a alors :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{F}$$

avec $\vec{F}$ la résultante des forces de pression : seule la différence de pression entre l'extérieur et l'intérieur de la bouteille importe $\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = 5\,\text{bar}$, et $F = \Delta p S = \Delta p \pi R^2$ où S est l'aire de la surface de la base du bouchon (éventuellement déterminée par analyse dimensionnelle, mais au programme de seconde). Après projection selon l'axe vertical, on a donc

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -mg + F$$

On peut simplifier l'équation précédente, étant donné que $mg \simeq 0{,}1\,\text{N}$ et $F = 5 \times 10^5 \times \pi(1 \times 10^{-2})^2 = 1{,}6 \times 10^2\,\text{N}$. Ainsi $m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \simeq F$ soit en intégrant $v_z(t) = \frac{F}{m}t$ et $z(t) = \frac{F}{2m}t^2$. On veut évaluer la vitesse lorsque le bouchon est entièrement sorti du goulot, c'est-à-dire lorsque $z = \ell$. Cela se produit au temps $t = \sqrt{\frac{2m\ell}{F}}$, où la vitesse vaut $v_{\text{éj}} = \frac{F}{m}\sqrt{\frac{2m\ell}{F}} = \sqrt{\frac{2F\ell}{m}}$.

- ☐ *Deuxième étape : mouvement de chute libre verticale*. On fait l'hypothèse que l'on peut négliger les frottements de l'air ainsi que la poussée d'Archimède. Le bouchon n'est alors soumis qu'à son poids, et l'énergie mécanique se conserve. Ainsi on peut écrire entre l'instant t précédent et la position d'altitude maximale (de vitesse nulle) que

$$\frac{1}{2}mv_{\text{éj}}^2 + mg\ell = 0 + mg(\ell + h)$$

soit

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{éj}}^2 = F\ell$$

et donc finalement la hauteur maximale est

$$\boxed{h = \frac{F\ell}{mg} \sim 60\,\text{m}}$$

- ☐ *Discussion :* cette valeur est évidemment surestimée, on s'attend à quelques mètres (on a tous en tête un bouchon de champagne sautant jusqu'au plafond en y laissant une marque). L'hypothèse d'absence de frottements lors de l'éjection étant très certainement incorrecte, la vitesse à l'éjection d'une bouteille de champagne n'étant certainement pas de $35\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. À noter néanmoins que des expériences ont été réalisées sur le sujet, et l'on trouve quand même une vitesse de l'ordre de $15\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$! Il faudrait certainement tenir compte aussi de la force de frottement de l'air lors du vol libre.

3.2 Montée des bulles

a) Approche théorique

Q14. La norme du poids de la bulle est $P = mg = \rho_{CO_2} V g$. Il nous faut donc la masse volumique du CO_2, calculable à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$P_{CO_2} V = nRT = \frac{m}{M_{CO_2}} RT \Leftrightarrow \rho_{CO_2} = \frac{m}{V} = \boxed{\frac{P M_{CO_2}}{RT} = 1{,}78\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}$$

D'autre part la poussée d'Archimède est, d'après l'énoncé, l'opposé du poids du volume d'eau équivalent au volume de la bulle, donc $\Pi = m_{\text{liq}} g = \rho_{\text{liq}} V g$. Ainsi

$$\boxed{\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{CO_2}}{\rho_{\text{liq}}} = 1{,}78 \times 10^{-3}}$$

ce qui justifie bien que le *poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède* et explique l'ascension de la bulle dans un verre de champagne.

Q15. Appliquons la deuxième loi de Newton à la bulle, dans le référentiel proposé par l'énoncé. Seules deux forces vont intervenir :

— la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = +\rho_{\text{liq}} V g \vec{e_z}$

— la force de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$

Il vient alors :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Pi} + \vec{f} = +\rho_{\text{liq}} V g \vec{e_z} - 6\pi\eta r \vec{v}$$

soit en réarrangeant et divisant par la masse :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v}_{\text{lim}}}{\tau}}$$

la projection sur $\vec{e_z}$ donne :

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

où $\boxed{\tau = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho_{CO_2} r^2}{9\eta}}$ et $\frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = \frac{\rho_{\text{liq}} V g}{m}$ soit $\boxed{v_{\text{lim}} = \frac{2\rho_{\text{liq}} r^2 g}{9\eta}}$.

Q16. Il s'agit d'un **temps**. Deux façons de procéder : soit on se base sur la dimension de l'équation différentielle établie précédemment où $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{\vec{v}}{\tau}\right]$ conduisant à $[\tau] = T$; soit on part de l'expression établie de τ et l'on aboutit au même résultat.

Q17. La solution de cette équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène et la solution particulière. On arrive à :

$$v_z(t) = A\exp(-t/\tau) + v_{\text{lim}}$$

Pour déterminer A, on sait que $v_z(0) = 0$, ainsi $A = -v_{\text{lim}}$. On a donc :

$$\boxed{v_z(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)}$$

Voir graphique d'un système du premier ordre.

Q18. On obtient $\boxed{\tau = 3{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$, temps relativement faible devant le temps de montée d'une bulle ($\sim 1\,\mathrm{s}$) : on peut donc approximer que la **vitesse de la bulle est quasiment égale à la vitesse limite durant toute la montée**.

3.3 Confrontation expérimentale

Q19. Si l'émission est périodique de période T, le fait de prendre $f_b = \dfrac{1}{T}$ va permettre d'observer une multitude de bulles, mais dont les positions correspondent à celles d'une bulle espacées temporellement de multiples de T. L'ensemble va apparaître fixe.

Q20. La bulle parcourt la distance $h_{n+1} - h_{n-1}$ en un durée égale à 2 périodes $T = 1/f_b$. Ainsi, en assimilant vitesse moyenne et vitesse instantannée :

$$v_n = \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2T} = f_b \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2} \approx 20 \frac{1,5}{2} = 15\,\text{mm/s}$$

Q21. L'allure des bulles sur la photographie n'est pas en accord avec l'hypothèse de vitesse constante : si c'était le cas, les positions successives seraient régulièrement espacées. L'expression établie précédemment de la vitesse limite montre qu'elle dépend du rayon de la bulle ... or on constate sur la photographie que le rayon des bulles augmente lorsqu'elles remontent dans la flûte. C'est probablement cette variation de rayon qui est responsable des variations de vitesse.

Q22. On suppose la relation $v_{\text{lim}} = \dfrac{2\rho_{\text{liq}} r^2 g}{9\eta}$ toujours vérifiée au cours de la montée. Ainsi

$$\log(v_{\text{lim}}) = 2\log(r) + \log\left(\frac{2\rho_{\text{liq}} g}{9\eta}\right) = \boxed{A + 2\log(r)}$$

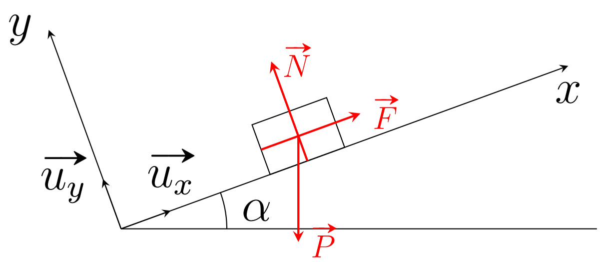
L'interprétation de la figure est plus délicate : il faut remarquer que les échelles n'y sont pas linéaires, c'est-à-dire que les graduations ne sont pas « régulièrement » espacées. Il s'agit en fait d'une échelle dite logarithmique, que nous introduirons dans le chapitre sur le filtrage. La courbe de la figure représente donc en fait $\log v_{\text{lim}}$ en fonction de $\log r$. On peut alors constater que tous les points expérimentaux se regroupent sur une droite, dont on peut estimer la pente à environ 2.

4 Mouvement du palet sur la glace

Q23. On choisit le référentiel terrestre. La durée de l'expérience, inférieure à une minute est très inférieure à 1 jour, période de révolution de la Terre dans le référentiel géocentrique. La Terre peut donc être considérée comme fixe et le référentiel terrestre supposé galiléen.

Q24. Le palet est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\left(\sin\alpha\vec{u_x} + \cos\alpha\vec{u_y}\right)$.
- la réaction normale $\vec{N} = N\vec{u_y}$
- la force de propulsion $\vec{F} = F\vec{u_x}$.



Q25. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} \quad \text{soit} \quad m\ddot{x}\vec{u_x} = -mg\left(\sin\alpha\vec{u_x} + \cos\alpha\vec{u_y}\right) + N\vec{u_y} + F\vec{u_x}$$

La projection sur l'axe (Ox) donne :

$$m\ddot{x} = F - mg\sin\alpha \quad \text{donc} \quad \boxed{F = m(a + g\sin\alpha)}$$

Q26. Le mouvement est uniformément accéléré donc $\ddot{x} = \dot{x}t$ ou $v = at$. En posant $\tau = 0{,}5\,\text{s}$, on a donc $\boxed{a = v/\tau = 100\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$. On en déduit donc :

$$\boxed{F = 16{,}5\,\text{N}}$$

Q27. Il reste deux forces exercées sur le palet : le poids et la réaction normale du support.
Calculons le travail élémentaire du poids :

$$\delta W(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P}.\text{d}\overrightarrow{OM} = -mg\left(\sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_y}\right).\text{d}x\overrightarrow{u_x} = -mg\sin\alpha\text{d}x < 0$$

Le poids à un caractère résistant
Calculons le travail élémentaire de $\overrightarrow{N}$:

$$\delta W(\overrightarrow{N}) = \overrightarrow{N}.\text{d}\overrightarrow{OM} = N\overrightarrow{u_y}.\text{d}x\overrightarrow{u_x} = 0$$

La réaction normale du support n'a pas d'effet sur le mouvement.
Q28. On applique le PFD que l'on projette suivant l'axe (Ox) : Déterminer l'expression de $x(t)$, déplacement du palet selon l'axe (Ox) :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\sin\alpha \\ \ddot{x} &= -g\sin\alpha \\ \dot{x} &= -gt\sin\alpha + v_0 \\ x &= -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0t + x_0 \end{aligned}$$

v_0 étant la vitesse initiale lors de la deuxième phase du mouvement $(t > \tau)$, et x_0 la position initiale.
Q29. La palet s'arrête si $\dot{x} = 0$ donc pour une durée $t_a = \frac{v_0}{g\sin\alpha}$. La distance d est donc :

$$d = x - x_0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g\sin\alpha}\right)^2\sin\alpha + v_0\left(\frac{v_0}{g\sin\alpha}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{d = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}}$$

Q30. Les forces de frottement ne sont pas conservatives.
Q31.

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{T}) = -TAB = -Tx$$

Or $T = fN$ et d'après le PFD projeté suivant l'axe vertical on a $N = mg$ donc :

$$\boxed{W_{A\to B}(\overrightarrow{T}) = -fmgx}$$

Calculer le travail de la composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ de l'action de la glace sur le palet lors du déplacement du palet.
Q32. On applique le PFD que l'on projette suivant l'axe (Ox) :

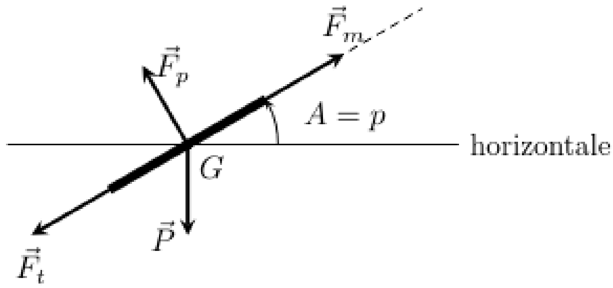
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -fN = -fmg \\ \ddot{x} &= -fg \\ \dot{x} &= -fgt + v_0 \\ x &= -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0t + x_0 \end{aligned}$$

Le palet s'arrête si $\dot{x} = 0$ soit $t'_a = \frac{v_0}{fg}$. Ainsi on trouve (même méthode que la question précédente) :

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2fg} = 2500\,\text{m}}$$

5 Mécanique de vol d'un avion

Q33.



Q34. Référentiel terrestre supposé galiléen, système : {avion}. On applique le principe fondamental de la dynamique, en utilisant le fait que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ car le mouvement est rectiligne uniforme. On a donc

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = \vec{0}.} \tag{1}$$

Q35. La projection de la relation 1 sur l'axes (Ox') donne :

$$-mg\sin(p) + F_m - F_t = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{F_m = mg\sin(p) + F_t}$$

Et sur l'axe (Oz') :

$$-mg\cos(p) + F_p = 0, \text{ soit } \boxed{F_p = mg\cos(p)}$$

Q36. D'après la dernière équation, on a $\dfrac{1}{2}\rho S v^2 C_p = F_p = mg\cos(p) = mg\cos A$.

$$\text{D'où le résultat} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}.}$$

Q37. La puissance fournie par une force $\overrightarrow{F}$ dont le point d'application est animé d'une vitesse $\vec{v}$ est $P = \overrightarrow{F}.\vec{v}$, donc ici $\boxed{\mathcal{P}_m = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = \|\vec{F}_m\|\, v}$.

Q38. Homogénéité de $\mathcal{P}_{m0}$: le terme C_t/C_p est sans dimension, le terme mg est une force, et le terme sous la racine est une vitesse (d'après l'expression de v question précédente). On a donc bien une puissance. $\boxed{f_0 = 30}$ et $\boxed{\mathcal{P}_{m0} = 20\,\mathrm{kW}.}$

Q39. Si $A \ll 1$ (en radians), ce qui est bien le cas si $A < 10° = 0.17\,\text{rad}$, alors $\sin A \sim A$ et $\cos A \sim 1$. On a donc

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}(1 + f_0 A).}$$

On inverse cette relation pour isoler A :

$$\boxed{A = \frac{1}{f_0}\left(\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_{m0}} - 1\right) = 5.0 \times 10^{-2}\,\text{rad} = 2{,}9°}$$

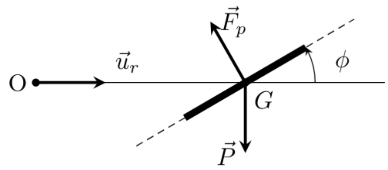
(attention, l'A.N. donne le résultat en radians, on convertit ensuite en degrés)

Q40. En projetant $\vec{v}$ on a $v_z = v\,\sin A$. On utilise l'expression de v :

$$\boxed{v_z = \sqrt{\frac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}\,\sin A = 1.3\,\text{m/s}.}$$

Q41. $\boxed{\eta = \frac{F_p}{mg} = \cos A}$ d'après la question b. On trouve donc $\boxed{\eta \simeq 1}$: l'avion n'est pas détruit.

Q42.



Q43. On a une trajectoire circulaire uniforme de centre O et de rayon R, parcourue à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = $ cst. Donc pour le point G :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OG} = R\vec{e}_r, \\ \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \text{(et donc } v = R\dot{\theta}), \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\dfrac{v^2}{R}\vec{e}_r. \end{cases}$$

Q44. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

Q45. La projection de la relation précédente sur les axes $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$ donne :

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{R} = F_p\,\sin\phi, \\ mg = F_p\,\cos\phi, \\ F_m = F_t. \end{cases}$$

On élimine F_p en prenant le rapport des deux premières équations. On en déduit $\boxed{R = \frac{v^2}{g\tan\phi}}$

Q46. $\boxed{\eta = \frac{F_p}{mg} = \frac{1}{\cos\phi}.}$

Q47. $\eta < \eta_{\text{max}}$ impose, d'après la relation précédente, $\cos\phi > 1/\eta_{\text{max}}$. L'angle ϕ maximal est donc ϕ_{max}, tel que $\cos\phi_{\text{max}} = 1/\eta_{\text{max}}$.

Il correspond à un rayon minimal $\boxed{R_{\text{min}} = \frac{v^2}{g\tan\phi_{\text{max}}} = \frac{v^2}{g\sqrt{\eta_{\text{max}}^2 - 1}}}$ (qui dépend de la vitesse)