M1 Cinématique du point

Exercice 1 - Questions courtes

1. a) Direct
   b) Indirect
   c) Indirect
   d) Direct
2. a) $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y$
   b) $\vec{u} = \sin\beta\,\vec{e}_x + \cos\beta\,\vec{e}_y$
   c) $\vec{u} = \cos\gamma\,\vec{e}_x - \sin\gamma\,\vec{e}_y$
   d) $\vec{u} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$
   e) $\vec{u} = -\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y$
   f) $\vec{u} = \sin\beta\,\vec{e}_x - \cos\beta\,\vec{e}_y$
   g) $\vec{u} = \cos\gamma\,\vec{e}_x - \sin\gamma\,\vec{e}_y$
3. a) Courbe b
   b) Courbe d

Exercice 4 - Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Trajectoire avec $\alpha = 0$

1. On a $a = -g\vec{e}_y$, ainsi on en déduit :

$$\vec{v} = v_0\vec{e}_x - gt\vec{e}_y$$

   et

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = v_0 t\vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{e}_y}$$

2. D'après la question précédente : $x = v_0 t$ et $y = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)$. L'équation suivant x permet de déduire $t = \frac{x}{v_0}$. En remplaçant dans l'équation suivant y, on arrive à :

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2} + h}$$

3. La cible a comme coordonnée : $x_c = 15\,\mathrm{m}$ et $y_c = 0$.
4. On remplace donc $x_c = 20$ et $y_c = 0$ dans l'équation de la trajectoire $y(x)$:

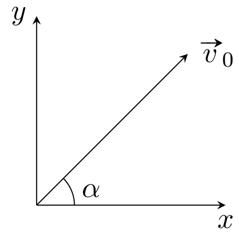
$$0 = -\frac{1}{2}g\frac{x_c^2}{v_0^2} + h$$

   Soit :

$$\boxed{v_0 = x_c\sqrt{\frac{g}{2h}}}$$

   Ainsi on trouve $v_0 = 14\,\mathrm{m/s}$ pour atteindre la cible à 20 m

Trajectoire avec un angle α



On commence par projeter le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans la base $(\vec{e}_x,\ \vec{e}_y)$:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \vec{e}_x + v_0 \sin\alpha\, \vec{e}_y$$

La position initiale de la cible est $\overrightarrow{OM}(0) = h\vec{e}_y$.

On applique ensuite la même méthode que précédemment :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{vmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} v_0 t \cos\alpha \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + h \end{vmatrix}$$

Ainsi, pour une trajectoire avec un angle α on a

$$x = v_0 t \cos\alpha$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + h$$

L'équation de la trajectoire est donc ($t = x/(v_0 \cos\alpha)$:

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha + h$$

Soit en isolant v_0 :

$$\boxed{v_0 = x_c\sqrt{\frac{g}{2\cos^2\alpha(x_c\tan\alpha + h)}}}$$

Pour $\alpha = 0$ on retrouve bien l'expression précédente.

Hauteur maximale

Pour avoir la hauteur maximale, on cherche le temps t_{max} tel que $v_y = dy/dt = 0$ (la vitesse verticale s'annule au sommet de la trajectoire) :

$$v_y(t_{\text{max}}) = -gt_{\text{max}} + v_0\sin\alpha = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{\text{max}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

En remplaçant t_{max} dans l'équation $y(t)$, on arrive à :

$$\boxed{y(t_{\text{max}}) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + h}$$

Exercice 5 - Descente dans un parking souterrain

1. L'énoncé indique que la voiture reste à distance constante d'un axe : cet axe a donc une importance particulière pour le mouvement, et il est naturel de le choisir comme axe z d'un repère cylindrique. Ce repère est rendu d'autant plus naturel par l'hypothèse de distance constante.
2. Par hypothèse, $r(t) = R =$ cte. Comme la voiture se déplace à vitesse constante sur une rampe d'inclinaison constante, sa vitesse de déplacement vertical V_z est constante, donc $z(t) = V_z t + z_0$ où z_0 est l'altitude initiale.
3. En repère cylindrique, le vecteur vitesse vaut :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + V_z\vec{e}_z}$$

   Le vecteur accélération s'écrit (à savoir redémontrer) :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

4. La voiture est supposée rouler à vitesse uniforme V dans le parking. En le traduisant sur la norme du vecteur vitesse :
$$|\vec{v}|^2 = V^2 \quad \text{soit} \quad R^2\dot{\theta}^2 + V_z^2 = V^2$$
On en déduit donc que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, et par conséquent $\ddot{\theta} = 0$. L'accélération se simplifie alors en :
$$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r}$$
elle est donc bien toujours radiale.

Exercice 6 - Course de kart

1. Le kart A entame son virage dès qu'il passe par l'axe Δ et parcourt un demi cercle de longueur :
$$\boxed{L_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}}$$
Le kart B continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage (et de même après le virage). Donc :
$$\boxed{L_B = 2(R_A - r_B) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}}$$
Le kart B parcourt moins de distance que A mais il est **impossible** de conclure si on ne connaît par la vitesse.
2. Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de la trajectoire, parcourue à vitesse constante (en **norme**), l'accélération (**en norme**) vaut :
$$a = \frac{v^2}{R} = 0,8g$$
Ainsi :
$$v_A = \sqrt{0,8gR_A} = 26{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad \text{et} \quad v_B = \sqrt{0,8gR_B} = 24{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
3. Calculons pour conclure le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage : $\Delta t = \frac{D}{v}$, ce qui donne :
$$\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s} \quad \text{et} \quad \Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}$$
Finalement le kart A va plus vite que le kart B : la meilleure trajectoire est la plus extérieure des deux.

Exercice 7 - Calcul de décélération

On choisit de résoudre le problème en coordonnée cartésienne, en utilisant une base $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ où $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire horizontal dirigée dans le sens du mouvement et $\vec{e}_y$ le vecteur unitaire vertical dirigé de bas en haut.
On considère une accélération uniforme tel que $\vec{a} = -a_0\vec{e}_x - g\vec{e}_y$ et une vitesse uniforme $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$, donc :
$$\begin{aligned} a_x &= -a_0 \\ v_x &= -a_0 t + v_0 \\ x &= -\frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t \end{aligned}$$
Pour $t = t_f$ la voiture est à l'arrêt ($v_x = 0$) et $x = x_f = 15\,\mathrm{m}$ donc $t_f = v_0/a_0$ et
$$x_f = -\frac{1}{2}a_0\frac{v_0^2}{a_0^2} + \frac{v_0^2}{a_0} = \frac{v_0^2}{2a_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{a_0 = \frac{v_0^2}{2x_f} = 6{,}43\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$