Corrigés

M3 Puissance et énergie du point matériel

Exercice 1 - Applications directes du cours

1. Attention aux conversions d'unités !

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}250 \times 10^3 \times (\frac{120}{3,6})^2 = 139\,\text{MJ}$$

2. (a) Il faut faire un schéma !

$$P(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{v} = Pv\cos(\frac{\pi}{2} + 0,07) = -160\,\text{W}$$

La puissance est négative, le poids s'oppose au mouvement, c'est une force résistive.

   (b) Un cycliste ne pourra pas faire chauffer facilement une tartine.

3. On applique le théorème de l'énergie mécanique. La seule force non conservative est la réaction du support $\vec{N}$, mais qui est orthogonale au déplacement, son travail est donc nul :

$$\Delta E_m = W_{A\to B}(\vec{N}) = 0 \quad \to \quad E_m(A) = E_m(B)$$

L'énergie mécanique se conserve. Ainsi :

$$E_c(A) + E_{pp}(A) = E_c(B) + E_{pp}(B)$$

Le skieur par sans vitesse initiale donc $E_c(A) = 0$. On choisit l'origine de l'axe z (ascendant) au point le plus bas. Ainsi $E_{pp}(B) = \text{cte} = 0$ (on choisit cte $= 0$, c'est-à-dire une énergie potentielle nulle au point le plus bas). Ainsi $E_{pp}(A) = mgz_A = mgh$. Finalement :

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \to \quad \boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Exercice 2 - Saut à la perche

Conservation de l'énergie mécanique car les frottements sont négligés. Au départ $E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et au sommet de la trajectoire $E_m = E_p = mgh$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \to \quad h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Dans le cas du saut à la perche il y a aussi l'énergie potentielle élastique de la perche à considérer. Mais au début lorsque le sportif cours elle est nulle et lorsqu'il est au sommet elle est également nulle. Ainsi la formule trouvée précédemment s'applique et on trouve $h = 5{,}1$ m ce qui est légèrement inférieur au record du monde.
La raison est que notre raisonnement s'applique pour un point matériel, ou en fait pour le centre de masse du sauteur. Or le centre de masse est déjà situé à une certaine hauteur par rapport au niveau du sol, d'où un résultat légèrement plus élevé.
Enfin, notre raisonnement montre que la hauteur maximale ne dépend pas de la perche utilisée, et en particulier de sa longueur. La perche sert “seulement” à convertir l'énergie cinétique du sauteur en mouvement ascendant,puis donc en énergie potentielle de pesanteur

Exercice 3 - Traîner une caisse

1. Bilan des forces :
   — Poids $\vec{P} = -mg\sin\alpha\vec{e_x} - mg\cos\alpha\vec{e_y}$ (force conservative).
   — Réaction normale du support $\vec{N} = -N\vec{e_y}$ (force non conservative).

— Frottements $\overrightarrow{f} = -f\overrightarrow{e_x}$ (force non conservative).
— Tension de la corde $\overrightarrow{T}$ (force non conservative)

2. La réaction normale du support est orthogonale au déplacement donc son travail est nul : $\boxed{W_{A\to B}(\overrightarrow{N}) = 0}$
3. Le déplacement élémentaire s'écrit $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x}$. Le calcul du travail du poids :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = \int_A^B \overrightarrow{P}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B (-mg\sin\alpha\overrightarrow{e_x} - mg\cos\alpha\overrightarrow{e_y})\,.\,(\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x}) = \int_{x_A}^{x_B} -mg\sin\alpha\mathrm{d}x$$

Donc :

$$\boxed{W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = -mg\sin\alpha(x_B - x_A) = -mg\sin\alpha L = -1539\text{ J}}$$

4. Le travail de la force de frottement est :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_A^B \overrightarrow{f}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B (-f\overrightarrow{e_x}).\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} = -f\int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \quad \text{donc} \quad \boxed{W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = -fL = -300\text{ J}}$$

5. On ne peut pas calculer le travail de la tension de la corde car on ne connait pas la direction de $\overrightarrow{T}$ ni sa norme. On peut cependant passer par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{N}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{T})$$

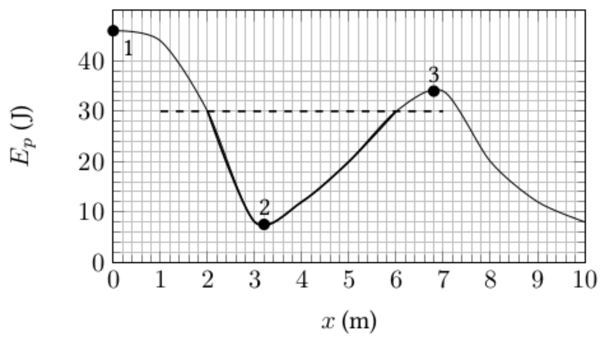
Or le solide est au repos au départ et à l'arrivée donc $E_c(A) = 0$ et $E_c(B) = 0$, ainsi :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{T}) = -W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) - W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = 1839\text{ J}$$

Exercice 4 - Étude énergétique

Le graphique ci-contre représente l'énergie potentielle d'un point matériel M astreint à se déplacer suivant l'axe x.

1. Les positions 1 et 3 sont des positions d'équilibre instables, la position 2 est une position d'équilibre stable.
2. Les valeurs de x accessibles sont $x \in [2\,\text{m}\,,6\,\text{m}]$
3. L'énergie mécanique de M est de 30 J.
4. Pour que la trajectoire de M ne soit pas bornée en $x > 0$, il faudrait que son énergie mécanique soit supérieure à 34 J. Donc son énegie cinétique doit être plus grande que 14 J.



Exercice 5 - Looping

1. En l'absence de frottements, le mouvement se fait à énergie mécanique constante donc :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = 0$$

On choisit $E_{pp} = mgz$ avec z repéré par rapport au point le plus bas (axe z ascendant). En notant A le point de départ et B le point d'arrivée, et en étudiant le cas limite où la bille arrive sans vitesse au point B, on a :

$$E_c(A) + E_{pp}(A) = E_c(B) + E_{pp}(B) \quad \rightarrow \quad mgh_{\text{min}} = mgh \quad \rightarrow \quad \boxed{h_{\text{min}} = h}$$

2. a) Pour $h = 2R$, la bille à tout juste l'énergie pour atteindre le haut de la boucle du looping. Sa vitesse est alors nulle arrivée en haut de la boucle et elle va alors tomber : elle ne peut pas effectuer un tours complet.

b) On utilise le théorème de l'énergie mécanique entre le point de départ (A)n et le point le plus bas (B). La vitesse en B est notée v_0 :

$$E_c(A) + E_{pp}(A) = E_c(B) + E_{pp}(B)$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

Ainsi :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

c) On utilise le théorème de l'énergie mécanique entre le point le plus bas (B) et le point M (où la bille a une vitesse v et une altitude z_m) :

$$E_c(B) + E_{pp}(B) = E_c(M) + E_{pp}(M)$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz_m$$

On peut exprimer z_m en fonction de θ : $z_m = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$, ainsi :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) \quad \rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}}$$

d) Le principe fondamental de la dynamique appliquée à la masse m donne :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

On a, en coordonnées polaires, $\vec{P} = mg\cos\theta\vec{e_r} - mg\sin\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{N} = -N\vec{e_r}$. Le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_r}$, ainsi le PFD donne :

$$mg\cos\theta\vec{e_r} - mg\sin\theta\vec{e_\theta} - N\vec{e_r} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

La projection sur $\vec{e_r}$ donne :

$$mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N \quad \text{soit} \quad N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$$

La vitesse s'écrit $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ soit $v = R\dot{\theta}$ donc $\dot{\theta} = v/R$, donc :

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} - 2mg(1-\cos\theta) \quad \text{soit} \quad \boxed{N = m\left(g(3\cos\theta - 2) + \frac{v_0^2}{R}\right)}$$

e) La bille reste en contact si la norme de $N \geq 0$, donc :

$$g(3\cos\theta - 2) + \frac{v_0^2}{R} \geq 0$$

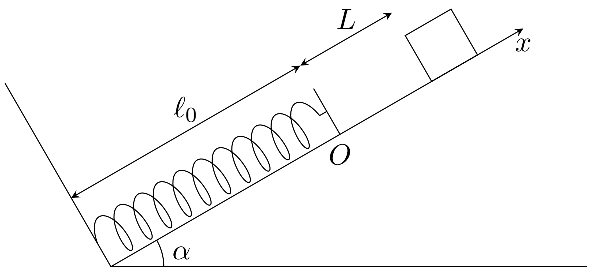
La condition est le plus difficilement vérifiée si $\theta = \pi$ (point le plus haut) soit :

$$-5g + \frac{v_0^2}{R} \geq 0$$
$$v_0^2 \geq 5gR$$
$$2gh' \geq 5gR$$
$$h' \geq \frac{5}{2}R$$

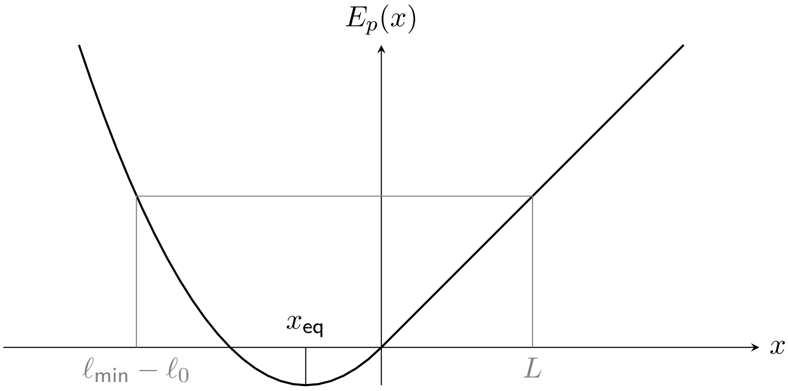
Exercice 6 - Mouvement sur un plan incliné

1. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le système étudiée est le cube considéré comme objet ponctuel M de masse m. On note ℓ la longueur du ressort et z l'altitude du point M.
   Les frottements sont négligées, le travail de la réaction normale du support est nulle et les autres forces mises en jeu (poids, force de rappel du ressort) sont conservatives. Ainsi, l'énergie mécanique se conserve lors du mouvement.
   On considère la situation initiale, notée A et la situation B dans laquelle le ressort est comprimé au maximum. En A comme en B la vitesse est nulle, donc l'énergie cinétique est nulle. Le théorème de l'énergie mécanique donne :
$$mgz_A = mgz_B + \frac{1}{2}k(\ell_{\text{min}} - \ell_0)^2$$
   Or $z_A = (L + \ell_0)\sin\alpha$ et $z_B = \ell_{\text{min}}\sin\alpha$, on a donc :
$$k(\ell_{\text{min}} - \ell_0)^2 + 2mg\sin\alpha(\ell_{\text{min}} - \ell_0) - 2mg\sin\alpha L = 0$$
   Il s'agit d'une équation du second degré sur $(\ell_{\text{min}} - \ell_0)$ que l'on peut résoudre. On conserve la racine négative car $\ell_{\text{min}} < \ell_0$ et il vient :
$$\boxed{\ell_{\text{min}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}\sin\alpha\left(\sqrt{1 + \frac{2Lk}{mg\sin\alpha}} - 1\right)}$$

2. Prenons l'origine des positions en $x = \ell_0$ et notons x l'axe parallèle au plan incliné dirigé vers le haut comme représenté sur le schéma ci-dessous :



   Avant l'impact, seule l'énergie potentielle de pesanteur est à prendre en compte : $E_{pp}(x > 0) = mgx\sin\alpha$. Après l'impact, il faut ajouter l'énergie potentielle élastique du ressort : $E_{pe}(x < 0) = mgx\sin\alpha + \frac{k}{2}x^2$. On a donc le graphe suivant :



   La position d'équilibre correspond à un minimum d'énergie potentielle, c'est-à-dire à l'endroit où sa dérivée s'annule : $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}(x_{\text{eq}}) = 0$ soit :
$$\boxed{x_{\text{eq}} = -\frac{mg\sin\alpha}{k}}$$