M4 Solide en rotation autour d'un axe fixe

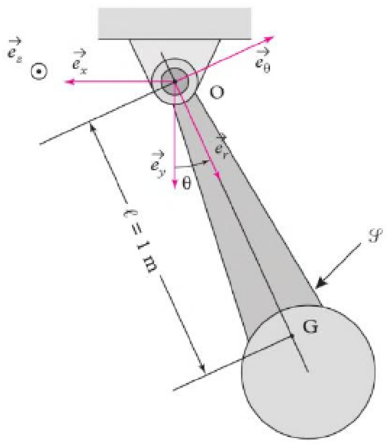
Exercice 1 - Equilibre

On considère une tige libre de tourner autour d'un axe Δ perpendiculaire à la tige. Sur la tige sont posées 4 masses : $m_1 = 5m$ à une distance d de l'axe sur la droite, $m_2 = 3m$ à une distance $5d$ de l'axe sur la droite, $m_3 = m$ à une distance 2d de l'axe sur la gauche, $m_4 = 4m$ à une distance $5d$ de l'axe sur la gauche.

1. Dans quel sens tourne la barre ?
2. Que se passe-t-il si on retire la masse m_3 ?

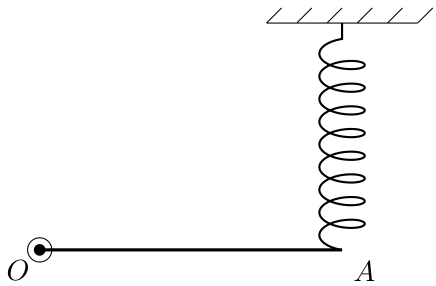
Exercice 2 - Balancier d'une horloge

Un balancier d'horloge est composé d'un solide S, de masse m, de centre de masse G et de moment d'inertie $J = km\ell^2$ par rapport à l'axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$. Il est mobile autour de l'axe Δ par l'intermédiaire d'une liaison pivot parfaite. L'axe Δ est fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



1. Faire un bilan des moments (par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_z)$ qui s'exercent sur le balancier.
2. Utiliser le théorème du moment cinétique pour trouver l'équation du mouvement. Quelle équation reconnaît-on aux petits angles ? Déterminer alors les expressions de la période et de la fréquence des petites oscillations.
3. Trouver l'intégrale première du mouvement, hors de l'approximation des petits angles.
4. Comment faut-il modifier ℓ si l'horloge avance ? Retarde ?

Exercice 3 - Barre fixée à ses extrémités



Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse m de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans autour de l'axe Oz. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attaché en A a un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.

1. Donner la position d'équilibre lorsque la barre est horizontal et le ressort vertical. Donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k et de ℓ_0.
2. La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

Exercice 4 - Toupie à bague

Les toupies à bague comportent un anneau percé dans lequel l'axe de la toupie passe. En maintenant l'anneau fixe d'une main, on peut mettre la toupie en rotation en tirant sur l'autre main sur la ficelle enroulée autour de l'axe. Cela permet d'atteindre des vitesses de rotation plus élevée qu'avec une toupie standard car la propulsion par la ficelle dure plus longtemps qu'en lançant simplement la rotation avec les doigts.

On modélise le rotor de la toupie (toupie sans l'anneau ni la ficelle) par un solide, dont le moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie Δ (orienté vers le haut de la toupie) est noté J_Δ. La ficelle qui permet d'entrainer la toupie est considérée inextensible et sans masse et fait une longueur $L = 31\,\text{cm}$. Elle est initialement entièrement enroulée autour d'un axe cylindrique de la toupie, de rayon $R = 5\,\text{mm}$. On négligera les variations de ce rayon dues à plusieurs épaisseurs de ficelle.

On considère de plus que la bague, lorsqu'elle est tenue par la personne lançant la toupie, contraint la toupie à tourner autour de l'axe Δ par une liaison pivot parfaite.

Pour lancer la toupie, la personne tire sur la ficelle avec une force $\vec{F}$, de norme constante égale à $F = 10\,\text{N}$, qui a entre autres pour effet de tendre la ficelle puis lâche la ficelle lorsque toute la longueur s'est déroulée. On appelle lancement l'intervalle de temps entre le début de la traction et le moment où la personne lâche la ficelle. On repère par la position angulaire de la toupie à l'instant t par l'angle $\theta(t)$ autour de Δ, défini de sorte que $\theta(0) = 0$ lorsque l'on commence à tirer.

1. Représenter schématiquement en vue de dessus la situation à un instant quelconque, en ne représentant, pour la toupie, que la ficelle et l'axe cylindrique où la ficelle est enroulée.
2. Parmi les trois valeurs suivantes, déterminer la valeur possible de J_Δ, pour une toupie de dimensionnée de manière raisonnable :

$$J_\Delta = 1 \times 10^{-10}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-2} \qquad J_\Delta = 5 \times 10^{3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-2} J_\Delta = 5 \times 10^{-5}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$$

Approche par moments

3. Quel est le moment scalaire par rapport à l'axe Δ de la force exercée par la personne ?
4. A l'aide du théorème du moment cinétique, déterminer l'expression du moment cinétique de la toupie par rapport à l'axe Δ pour $t > 0$.
5. En déduire $\omega(t)$, la vitesse angulaire de rotation de la toupie à l'instant t en fonction de F, R, t et J_Δ, puis sa position angulaire $\theta(t)$ à cet instant.
6. Déterminer le nombre de tous que la toupie fait entre le début et la fin du lancement.
7. En déduire que la durée T du lancement s'écrit :

$$T = \sqrt{\frac{2LJ_\Delta}{FR^2}}$$

   et déterminer la vitesse angulaire de la toupie à la fin du lancement, notée ω_f.
8. Commenter la manière dont T dépend de J_Δ et de F.

Approche énergétique

On se propose de retrouver la vitesse angulaire en fin de lancement en utilisant une approche énergétique.

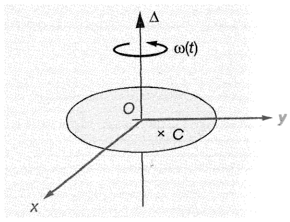
9. En considérant que la force exercée par la personne est orientée dans une direction constante, calculer le travail exercé par la personne au cours du lancement.
10. En déduire l'énergie cinétique à la fin du lancement, puis retrouver la vitesse finale de la toupie ω_f.

Freinage de la toupie

La toupie, une fois lancée, tourne sur une table et celle-ci exerce un couple C_f de frottements solide constant par rapport à l'axe Δ, $C_f = -1{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{N \cdot m}$. On considère que la toupie chute lorsque sa vitesse angulaire devient nulle.

11. Commenter le signe de C_f et calculer la puissance du couple.
12. Déterminer la durée pendant laquelle la toupie tourne avant de chuter.

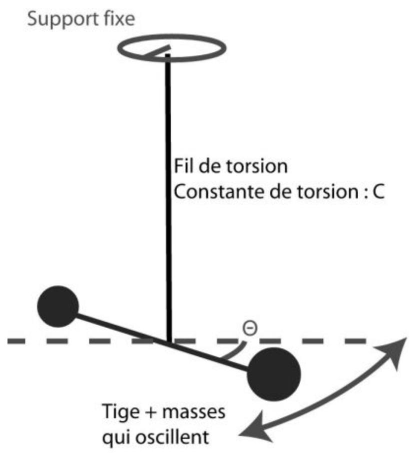
Exercice 5 - Réaction d'un axe



Un disque non homogène de centre O, de masse m et de rayon R est en liaison pivot autour de l'axe $\Delta = Oz$ à la vitesse angulaire $\omega(t)$. La liaison pivot est supposée parfaire. Le centre d'inertie du disque noté C est tel que $OC = a$. On note J_Δ le moment d'inertie du disque.

1. Initialement, la vitesse angulaire du disque vaut ω_0. Que dire de son évolution $\omega(t)$?
2. Évaluer la réaction $\vec{R}$ de l'axe sur le disque. Initialement, le point C est situé sur l'axe Ox.
3. Pourquoi a-t-on intérêt à diminuer a, notamment lors de rotations rapides ? C'est ce que l'on appelle l'équilibrage statique.

Exercice 6 - Pendule de torsion



On considère une tige mince de masse m de longueur L, suspendue par un fil et libre de tourner dans le plan horizontal autour de l'axe du fil (voir `https://youtu.be/1f4JyojXpzE`). On note θ l'angle de rotation de la tige par rapport à sa position d'équilibre. Le fil applique à la tige un couple résistant (dit couple de torsion) : $\Gamma = -C\theta$. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe du fil est $J = \frac{1}{12}mL^2$.

Étude dynamique

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la tige.
2. En déduire la période des oscillations de la tige.
3. AN : $m = 500\,\mathrm{g}$, $L = 50\,\mathrm{cm}$, $C = 90\,\mathrm{N \cdot m/rad}$

Étude énergétique

1. Par analogie avec un ressort, déterminer l'énergie potentielle de torsion.
2. En déduire l'énergie mécanique du système.
3. Le système est-il conservatif ?
4. Retrouver l'équation différentielle du mouvement avec l'énergie mécanique.

Exercice 7 - Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $J = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}$$

3. Montrer que cette relation peut-être réécrite :

$$\sqrt{3g}L\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$

4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On donne pour $\theta_0 = 5°$:

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1$$